ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN VĂN THÌN

SỰ DUY NHẤT CỦA CÁC HÀM PHÂN HÌNH VỚI ĐA THỨC SAI PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN VĂN THÌN

SỰ DUY NHẤT CỦA CÁC HÀM PHÂN HÌNH VỚI ĐA THỨC SAI PHÂN

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60. 46. 01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
T.S Hà Trần Phương

Thái Nguyên – Năm 2012

Mục lục

Mở đầu

1. Mục đích và lý do chọn luận văn

Năm 1926, Nevanlinna chứng minh Định lý năm điểm về sự xác định duy nhất của các hàm phân hình: hai hàm phân hình f và g trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ bằng nhau tại năm điểm phân biệt thì $f \equiv g$. Kết quả của Nevanlinna cho thấy một hàm phân hình được xác định một cách duy nhất bởi ảnh ngược không kể bội của năm giá trị phân biệt. Công trình này của ông được xem là khởi nguồn cho các công trình nghiên cứu về sự xác định duy nhất của hàm hay ánh xạ phân hình. Về sau, hướng nghiên cứu này thu hút được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước: M. Ru, F. Fujimoto, C. C. Yang, D. D. Thai, H. H. Khoai, T. T. H. An, ...

Thời gian gần đây, R. G. Halburd và R. J. Korhonen (2006, [10]), Y. M. Chiang và S. J. Feng (2008, [13]) đã nghiên cứu lý thuyết Nevanlinna cho toán tử sai phân. Những kết quả của họ giúp chúng ta nghiên cứu sự duy nhất của hàm phân hình, hàm nguyên với đa thức sai phân, nghiên cứu phương trình sai phân.... Năm 2011, K. Liu, X. Liu và T. B. Cao ([8, 7]) đã chứng minh một số kết quả về sự duy nhất của các hàm phân hình, hàm nguyên và đa thức sai phân, về nghiệm của phương trình sai phân. Với mong muốn tiếp cận hướng nghiên cứu này tôi đã chọn luận văn: **"Sự duy nhất của các hàm phân hình với đa thức sai phân"**. Mục đích chính của luận văn là tiếp tục nghiên cứu vấn đề của K. Liu, X. Liu và T. B. Cao.

2. Nội dung nghiên cứu

Luận văn nghiên cứu sự duy nhất của các hàm phân hình với đa thức sai phân, nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình sai phân.

3. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu cơ bản: Đọc bài báo của các tác giả theo hướng nghiên cứu, từ đó tìm ra những ý tưởng mới để nghiên cứu.

Luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Kiến thức cơ sở, trình bày những kiến cơ sở, cần thiết cho chứng minh kết quả trong chương hai: lý thuyết Nevanlinna, lý thuyết Nevanlinna cho toán tử sai phân.

Chương 2: Sự duy nhất của các hàm phân hình với đa thức sai phân. Trong chương này chúng tôi chứng minh một số kết quả về sự duy nhất của hàm phần hình với đa thức sai phân và sự tồn tại nghiệm của phương trình sai phân.

Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn, tôi đã nhận được sự dạy bảo tận tình của các thầy cô giáo ở trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên, ĐHSP Hà Nội, Viện Toán học. Đặc biệt là sự chỉ bảo, hướng dẫn tận tình của thầy giáo TS. Hà Trần Phương. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy, tới các thầy cô giáo đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua. Xin cảm ơn gia đình và các bạn bè đồng nghiệp đã giúp đỡ, động viên tôi hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2012

Nguyễn Văn Thìn

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong phần này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở trong Lý thuyết Nevanlinna cho các hàm phân hình.

1.1 Các hàm Nevanlinna

Với một $0 < R \leqslant \infty$, ta kí hiệu

$$D(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

Cho f là hàm phân hình trên đĩa $D(R)$ và $r < R$, ký hiệu $n(r, f)$ là số cực điểm của f kể cả bội trong đĩa đóng $\overline{D}(r)$. Khi đó *hàm đếm tại cực điểm* của f, ký hiệu $N(r, f)$, được xác định như sau:

$$N(r, f) = \int\limits_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r,$$

trong đó $n(0, f) = \liminf\limits_{t \longrightarrow 0} n(t, f)$. Hàm *xấp xỉ* $m(r, f)$ của hàm f được xác định như sau:

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

trong đó $\log^+(x) = \max\{\log x, 0\}$, với $x > 0$. Hàm *đặc trưng Nevanlinna* của f, ký hiệu là $T(r, f)$, được xác định bởi:

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Với mỗi $a \in \mathbb{C}$, ký hiệu $n(r, \dfrac{1}{f-a})$ là số các a-điểm của f kể cả bội trong đĩa đóng $\overline{D}(r)$. Khi đó *hàm đếm tại các a-điểm* của f, ký hiệu $N(r, \dfrac{1}{f-a})$, được xác định như sau:

$$N(r, \frac{1}{f-a}) = \int\limits_0^r \frac{n(t, \frac{1}{f-a}) - n(0, \frac{1}{f-a})}{t} dt + n(0, \frac{1}{f-a}) \log r,$$

trong đó $n(0, \dfrac{1}{f-a}) = \liminf\limits_{t \longrightarrow 0} n(t, \dfrac{1}{f-a})$. Từ định nghĩa hàm xấp xỉ, ta có

$$m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta$$

và

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = m(r, \frac{1}{f-a}) + N(r, \frac{1}{f-a}).$$

Một số tính chất của các hàm Nevanlinna

1. $m(r, \sum\limits_{k=1}^n f_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n m(r, f_k) + \log n;$
2. $m(r, \prod\limits_{k=1}^n f_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n m(r, f_k);$
3. $N(r, \sum\limits_{k=1}^n f_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n N(r, f_k);$
4. $N(r, \prod\limits_{k=1}^n f_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n N(r, f_k);$
5. $T(r, \sum\limits_{k=1}^n f_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n T(r, f_k) + \log n;$
6. $T(r, \prod\limits_{k=1}^n f_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n T(r, f_k).$

1.2 Các định lý cơ bản

Định lý 1.1 (Định lý cơ bản thứ nhất). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\overline{D}(r)$, khi đó ta có*

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(1),$$

trong đó $O(1)$ là đại lượng bị chặn.

Định lý 1.2 (Định lý cơ bản thứ hai). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và $a_1, ..., a_q$ là các số phức phân biệt, khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ ta có bất đẳng thức*

$$\begin{aligned}(q-1)T(r, f) + N_{ram}(r, f) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N(r, \frac{1}{f-a_j}) + N(r, f)\\ + (1+\varepsilon)\log^+(\log T(r, f)) + \log T(r, f) + O(1)\end{aligned}$$

đúng với mọi $r > 0$ đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn. Trong đó

$$N_{ram}(r, f) = N(r, \frac{1}{f'}) + 2N(r, f) - N(r, f').$$

Dễ chứng minh được $N_{ram}(r, f) \geqslant 0$.

Hệ quả 1.3. *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và $a_1, ..., a_q$ là các số phức phân biệt, khi đó ta có bất đẳng thức*

$$(q-1)T(r, f) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \overline{N}(r, \frac{1}{f-a_j}) + \overline{N}(r, f) - N_0(r, \frac{1}{f'}) + S(r, f)$$

đúng với mọi $r > 0$ đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn, $S(r, f) = o(T(r, f))$ khi $r \longrightarrow \infty$ và $N_0(r, \frac{1}{f'})$ là hàm đếm tại không điểm của f' mà không là không điểm của $\prod_{j=1}^{n}(f - a_j)$.

Hàm phân hình $a(z)$ được gọi là hàm *đủ nhỏ* của hàm phân hình $f(z)$ nếu $T(r, a) = S(r, f)$. Trong đó $S(r, f) = o(T(r, f))$ khi $r \longrightarrow \infty$, ngoài một tập có độ đo hữu hạn.

Năm 2004, K. Yamanoi ([6]) đã tổng quát định lý cơ bản thứ hai cho hàm đủ nhỏ. Kết quả của tác giả như sau:

Định lý 1.4 ([6]). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và $a_1(z), \ldots, a_q(z)$ là các hàm phân hình đủ nhỏ của f. Khi đó ta có bất đẳng thức sau*

$$(q-2)T(r, f) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \overline{N}(r, \frac{1}{f - a_j}) + S(r, f).$$

1.3 Lý thuyết Nevanlinna cho toán tử sai phân

Cho f là một hàm phân hình, *bậc* của f, ký hiệu là $\rho(f)$, được xác định bởi

$$\rho(f) = \limsup_{r \longrightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Nếu $\rho(f) < +\infty$ thì ta nói f có bậc hữu hạn.

Hàm phân hình $f(z)$ trên $\mathbb{C}$ được gọi là *tuần hoàn* với chu kỳ $c \in \mathbb{C}$ nếu đẳng thức $f(z + c) = f(z)$ đúng với mọi $z \in \mathbb{C}$. Cho f là hàm phân hình, $c \in \mathbb{C}$ là hằng số, toán tử sai phân của f ký hiệu là

$$\Delta_c f = f(z + c) - f(z).$$

Gần đây, R. G. Halburd, R. J. Korhonen, Y. M. Chang, S. J. Fang, ... đã nghiên cứu lý thuyết Nevanlinna cho toán tử sai phân và đạt được một số kết quả sau:

Định lý 1.5 ([10]). *Cho f là hàm phân hình khác hằng với bậc hữu hạn,*

$c \in \mathbb{C}$. *Khi đó đẳng thức*

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) = S(r, f)$$

đúng với r *đủ lớn ngoài một tập* E *có độ đo logarithmic hữu hạn* $\int_E \frac{dr}{r} < +\infty$.

Lưu ý rằng điều kiện f là hàm phân hình với bậc hữu hạn là không thể bỏ qua. Ta xét ví dụ sau ([12]): Xét hàm $g(z) = e^{e^z}$ với $c = 1$. Khi đó

$$m(r, \frac{g(z+c)}{g(z)}) = (e-1)m(r, g) = (e-1)T(r, g)$$
$$\sim (e-1)\frac{e^r}{\sqrt{2\pi^3 r}} = O(T(r, g)).$$

Định lý 1.6 ([13]). *Cho* f *là hàm phân hình khác hằng với bậc hữu hạn,* $c \in \mathbb{C}$. *Khi đó*

$$T(r, f(z+c)) = T(r, f) + S(r, f).$$

Định lý 1.7 ([10]). *Cho* f *là hàm phân hình khác hằng với bậc hữu hạn sao cho* $\Delta_c f \not\equiv 0$, $c \in \mathbb{C}$. *Cho* $q \geqslant 2$, *và* $a_1(z), ..., a_q(z)$ *là các phân hình đủ nhỏ tuần hoàn với chu kỳ* c. *Khi đó ta có*

$$m(r, f) + \sum_{k=1}^{q} m(r, \frac{1}{f - a_k}) \leqslant 2T(r, f) - N_{pair}(r, f) + S(r, f),$$

trong đó

$$N_{pair}(r, f) = 2N(r, f) - N(r, \Delta_c(f)) + N(r, \frac{1}{\Delta_c f})$$

và bất đẳng thức trên đúng với r *đủ lớn ngoài một tập* E *có độ đo logarithmic hữu hạn.*