ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ HƯỜNG

BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN VÀ TÍCH CHẬP

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

––––––––––

NGUYỄN THỊ HƯỜNG

BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN VÀ TÍCH CHẬP

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn luận văn

Những biến đổi Fourier, Laplace là những công cụ có tác dụng to lớn trong toán học lý thuyết và ứng dụng. Vô số các ứng dụng trong vật lý lý thuyết, kỹ thuật điện và nhiều lĩnh vực khác đã khiến cho những biến đổi này là một trong ba tiến bộ quan trọng nhất của toán học trong một phần tư cuối cùng của thế kỷ XIX. Bên cạnh những biến đổi Fourier và Laplace, các nhà Toán học và Vật lý học còn sở hữu một kho tàng các phép biến đổi tích phân khác cho từng phạm vi riêng của mình với những ứng dụng trong thực tế. Trong số các biến đổi đó, biến đổi Fourier có vai trò nổi bật nhất.

Biến đổi Fourier phân là sự khái quát của toán tử tích phân Fourier thông thường bằng cách cho nó phụ thuộc liên tục vào một tham số a (được chứa trong tổ hợp $\frac{a\pi}{2}$). Trong toán học, bậc a của biến đổi Fourier phân là luỹ thừa a của toán tử trong biến đổi Fourier thông thường. Biến đổi Fourier bậc 1 chính là biến đổi Fourier thông thường. Biến đổi bậc $-a$ chính là biến đổi ngược của biến đổi bậc a.

Với sự phát triển của biến đổi Fourier phân và các khái niệm có liên quan, chúng ta thấy rằng miền tần số thông thường chỉ là trường hợp đặc biệt của sự liên tục các miền Fourier phân đoạn. Trong lý thuyết về việc thay thế tín hiệu đại diện, chúng ta cũng thấy được sự liên quan đến việc phân bố thời gian và tần số. Do đó, tất cả các tính chất của biến đổi Fourier thông thường trở thành một trường hợp đặc biệt của biến đổi Fourier phân.

Những bài viết đầu tiên về biến đổi Fourier phân được thực hiện bởi:

Wiener 1929, Condon 1937, Bargmann 1961, de Bruijn 1937. Điều quan trọng là trong suốt thập niên 80 của thế kỉ XX đã xuất hiện nhiều bài viết đi theo hai chiều hướng khác biệt: Namias 1980, McBride và Kerr 1987 và Mustard 1987, 1989, 1991, 1996. Tuy nhiên, số lượng các ấn phẩm chỉ thực sự bùng nổ sau khi phép biến đổi áp dụng trong quang học và xử lý tín hiệu được công bố. Trong đó, có các bài viết của: Lohmann 1993, Ozaktas và những người khác 1994; Alieva và những người khác 1994; Almeida 1994. Việc nghiên cứu phép biến đổi Fourier phân đóng một vai trò quan trọng xây dựng một trong những kỹ thuật thuận tiện cho việc giải quyết các lớp nhất định của phương trình vi phân thường và một phần phát sinh trong cơ học lượng tử cổ điển Hamiltonias bậc hai. Kỹ thuật mới này sau đó được mở rộng đến các vấn đề ba chiều và được áp dụng để mô tả cơ học lượng tử của các chuyển động của electron trong từ trường đều. Các kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng phép biến đổi Fourier phân có nhiều ứng dụng trong vật lý, cơ học, kĩ thuật điện và một số ngành khoa học khác. Sự ứng dụng rộng dãi trên nhiều lĩnh vực khoa học và toán học của phép biến đổi Fourier phân và tích chập đã nói nên tầm quan trọng của vấn đề này. Vì thế, tôi lựa chọn luận văn này là muốn được tiếp cận, tìm hiểu và nghiên cứu về vấn đề này.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc tài liệu từ các tạp chí toán học trong nước và quốc tế liên quan đến phép biến đổi Fourier và tích chập. Qua đó, tìm hiểu và nghiên cứu về vấn đề này.

3. Mục đích của luận văn

Mục đích của luận văn này là học tập và giới thiệu các kết quả nổi bật về các biến đổi Fourier và dạng Fourier phân được quan tâm nhiều và phát triển trong khoảng hai thập niên gần đây.

4. Nội dung của Luận văn

Luận văn bao gồm phần Mở đầu, hai chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1. Giới thiệu tổng quan một số phép biến đổi Fourier phân.

Trước hết trong mục 1.1 tôi trình bày khái quát về biến đổi Fourier thông thường. Trong các mục tiếp theo chúng tôi giới thiệu biến đổi Fourier phân Naminas [13], biến đổi Hartley phân [10], biến đổi Fourier phân dạng luỹ thừa LMT [14] (Y. Luchko, H. Martinez, J. Trujillo), biến đổi Fourier phân dạng luỹ thừa RCL [9] (Luis Guillermo Romero, Ruben Alejandro Cansform and Luciano Leonardo Luque).

Chương 2. Giới thiệu về tích chập của các biến đổi Fourier phân và biến đổi Hartley phân. Tích chập của các biến đổi Fourier phân và biến đổi Hartley phân là sự mở rộng của tích chập cổ điển của các phép biến đổi tích phân thông thường tương ứng. Tích chập của các phép biến đổi tích phân này ngày càng được quan tâm vì đã tìm thấy những ứng dụng của chúng trong một số lĩnh vực, bao gồm lý thuyết tín hiệu, xử lý ảnh và quang học [3].

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và nhiệt tình chỉ bảo của Tiến sĩ Nguyễn Văn Ngọc, Viện Toán học. Em xin được bày tỏ lòng biêt ơn sâu sắc đến Thầy. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán-trường Đại học sư phạm, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K18B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Thị Hường

Chương 1

BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN

Trong chương này giới thiệu tổng quan một số phép biến đổi Fourier phân. Trước hết trong mục 1.1 tôi trình bày khái quát về biến đổi Fourier thông thường. Trong các mục tiếp theo chúng tôi giới thiệu biến đổi Fourier phân Naminas [13], biến đổi Hartley phân [10], biến đổi Fourier phân dạng luỹ thừa LMT [14] (Y. Luchko, H. Martinez, J. Trujillo), biến đổi Fourier phân dạng luỹ thừa RCL [9] (Luis Guillermo Romero, Ruben Alejandro Cansform and Luciano Leonardo Luque).

1.1 Biến đổi tích phân Fourier thông thường

Để có thể hiểu về biến đổi Fourier phân, trước hết chúng ta xét biến đổi Fourier thông thường trong $L^1(\mathbb{R})$. Các kết quả dưới đây có thể thấy trong nhiều tài liệu, thí dụ [4].

1.1.1 Định nghĩa của biến đổi Fourier

Định nghĩa 1.1. *Nếu $f \in L^1(\mathbb{R})$, ta định nghĩa biến đổi Fourier của f là:*

$$\hat{f}(x) = F[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it.x}dt, x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Và biến đổi Fourier ngược là

$$\breve{f}(x) = F^{-1}[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it.x}dt. \quad (1.2)$$

Từ các công thức (1.1), (1.2), *suy ra*

$$\breve{f}(x) = \hat{f}(-x), F^{-1}[f(t)] = F[f(-t)]. \quad (1.3)$$

1.1.2 Các tính chất cơ bản

Xét một số tính chất của biến đổi Fourier

Tính chất 1 (Tính bị chặn). $F[f] = \hat{f}(x)$ là hàm bị chặn trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh. Thật vậy, theo (1.1), ta có

$$|\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L_1}.$$

□

Tính chất 2 (Tính liên tục đều). $\hat{f}(x) = F[f]$ là hàm liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh. Thật vậy, với $x, h \in R$, ta có

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||e^{-itx}||e^{-ith} - 1|dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||(\cos th - 1) - i \sin th|dt \\
&\leq 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|| \sin \frac{th}{2}|dt \\
&\leq 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|t|>R} |f(t)|dt + R|h| \int_{|t|\leq R} |f(t)|dt.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra, với $\epsilon > 0$ có thể chọn được $R = R(\epsilon) > 0$ và $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, sao cho $|h| < \delta$, có bất đẳng thức

$$|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| < \epsilon, \forall x \in \mathbb{R},$$

nghĩa là $\hat{f}(x)$ là liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Tính chất 3 (Tính liên tục của toán tử Fourier). Toán tử F liên tục theo nghĩa sau đây: Nếu $\{f_k\} \in L^1(\mathbb{R})$, $f_k \to f \in L^1(\mathbb{R})$, $k \to \infty$ trong $L^1(\mathbb{R})$, thì

$$\lim_{k\to\infty} F[f_k] = F[f].$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$|F[f] - F[f_k]| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f_k(t)|dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - f_k\|_1.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Tính chất 4 (Định lý Riemann-Lebesgue). Nếu $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, thì $\hat{f}(x) = F[f] \to 0$, khi $|x| \to \infty$.

Tính chất 5 (Đẳng thức Parseval). Với $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, có đẳng thức

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_1(y) f_2(y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\hat{f}_2(x)dx.$$

Chứng minh. Thật vậy, vì

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f_1(x)||f_2(y)|dxdy &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)|dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(y)|dy \\ &= \|f_1\|_1 \|f_2\|_1 < \infty,\end{aligned}$$

nên theo Định lý Fubini, ta có

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{ix.y} f_1(x) f_2(y)dxdy &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) \Big\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)e^{ix.y}dx \Big\} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \Big\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)e^{ix.y}dy \Big\} dx.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Tính chất 6 (Biến đổi Fourier của tích chập). Nếu $f(t), g(t) \in L^1(\mathbb{R})$, thì

$$F[f * g] = F[f].F[g].$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}F[f*g](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(t)e^{itx}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(t-y)dy \Big) e^{itx}dt.\end{aligned}$$