ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

--------------- @ ---------------

LƯU THỊ NHÀN

CHUẨN EISENMAN TRÊN ĐA TẠPPHỨC

CHUYÊN NGÀNH: GIẢI TÍCH
MÃ SỐ : 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

--------------- @ ---------------

LƯU THỊ NHÀN

CHUẨN EISENMAN TRÊN ĐA TẠP PHỨC

CHUYÊN NGÀNH: GIẢI TÍCH
MÃ SỐ : 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS PHẠM VIỆT ĐỨC

THÁI NGUYÊN – 2009

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Năm 1969, D.A Eisenman trong luận án Tiến sĩ của mình [5] đã đưa ra khái niệm chuẩn Eisenman E^k trên một đa tạp phức.

Trong trường hợp k = 1 nó chính là bình phương của metric vi phân Kobayashi [8]. Năm 1985, trong [6] I.Graham và H. Wu đã chứng minh được một số tính chất của E^k tương tự như tính chất của metric vi phân Royden-Kobayashi. Mục đích của luận văn này là tìm hiểu về chuẩn Eisenman và trình bày một cách có hệ thống các tính chất của nó.

Luận văn được chia làm ba chương.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày các tính chất của nhóm tự đẳng cấu của B^n và metric vi phân Royden-Kobayashi làm cơ sở để trình bày các kiến thức ở các chương tiếp theo.

Chương 2. Các khoảng cách bất biến và chuẩn Eisenman trên B^n

Phần đầu của chương trình bày một số khoảng cách bất biến trên B^n và một số tính chất của chúng. Phần tiếp theo của chương là trình bày về chuẩn Eisenman trên B^n và các tính chất của chuẩn Eisenman trên B^n.

Chương 3. Chuẩn Eisenman trên đa tạp phức

Trong chương này chúng tôi đã trình bày khái niệm và một số tính chất của chuẩn Eisenman trên một đa tạp phức. Ngoài ra còn trình bày một số khái niệm như dạng thể tích nội tại Eisenman, độ đo Eisenman trên đa tạp, hyperbolic k-độ đo. Phần cuối chương xét cụ thể trường hợp E^1 và chứng minh công thức tích của chuẩn Eisenman trên các đa tạp phức.

Luận văn được hoàn thành tại khoa Toán Trường Đại Học Sư Phạm Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Việt Đức. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn chân thành đến người Thầy của mình .

Nhân đây cho phép tôi bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn đến các thầy, cô trong tổ bộ môn Giải tích. Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô phản biện đã cho tôi những ý kiến quý báu để tôi hoàn thành luận văn này, tôi xin cảm ơn Ban Giám Hiệu, Khoa Toán, Khoa sau Đại học Trường Đại học Sư Phạm Đại học Thái Nguyên và những người thân đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Do nhiều nguyên nhân khác nhau nên luận văn này không tránh khỏi thiếu sót và hạn chế, tôi mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2009

Lưu Thị Nhàn

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Nhóm tự đẳng cấu của B^n

1.1.1. Định nghĩa

$B^n(r)=\left\{z\in\mathbb{C}^n : \|z\|<r\right\}$ ở đây $\|.\|$ là chuẩn Euclid.

Với $a\in B^n(r)$ ta định nghĩa ma trận $\Gamma_r(a)$ cấp $n\times n$ như sau:

$$\Gamma_r(a)=\frac{a\cdot {}^t\overline{a}}{r-v_r(a)}-v_r(a)I,$$

trong đó a là ma trận cột , $v_r(a)=\sqrt{r^2-\|a\|^2}$, và I là ma trận đơn vị.

Khi $r = 1$ ta kí hiệu $v(a) = v_1(a)$.

1.1.2. Một số tính chất

Với $a\in B^n(r)$, ta định nghĩa ánh xạ $g_a^r : B^n(r)\to B^n(r)$ xác định bởi

$$g_a^r(z)= r.\Gamma_r(a)\cdot\frac{z-a}{r^2-{}^t\overline{a}\cdot z},\ z\in B^n(r)$$

Khi $r = 1$ ta kí hiệu $r(a)= r_1(a);\ g_a(z)= g_a^1(z)$.

1.1.2.1. Ta có

$$\Gamma_r(a)= r.\Gamma(\frac{a}{r}).$$

1.1.2.2. Cho $a, z\in B^n(r)$, ta có đẳng thức $g_a^r(z)= r\cdot g_{\frac{a}{r}}(\frac{z}{r})$.

Chứng minh.

$$rg_{\frac{a}{r}}\left(\frac{z}{r}\right)=r^2\cdot\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)\frac{z-a}{r^2-{}^t\overline{a}\cdot z}=r.\Gamma_r(a).\frac{z-a}{r^2-{}^t\overline{a}\cdot z}=g_a^r(z).$$

1.1.2.3. *Nhóm* $Aut(B^n(r))$ *các tự đẳng cấu của* $B^n(r)$ *tác động bắc cầu trên* $B^n(r)$.

Chứng minh.

Ta có

$$g_a^r \in Aut\left(B^n(r)\right) \text{ và } g_a^r(a)=0,$$

$$g_a^r(0) = rg_{\frac{a}{r}}(0) = r\frac{-a}{r} = -a.$$

1.1.2.4. Ta có

$Aut\left(B^n(r)\right)=\left\{A.g_a^r : A\in U(n), a\in B^n(r)\right\}$, *trong đó U(n) là nhóm unita.*

Chứng minh.

Ta có $Aut(B^n(r))$ và $Aut\left(B^n\right)$ là đẳng cấu, hơn nữa

$$Aut\left(B^n\right)=\left\{A\cdot g_a : A\in U(n)\right\}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

1.1.2.5. Ta có $\Gamma_r(a)a=ra$ với $a\in B^n(r)$.

Chứng minh.

$$\Gamma_r(a)a = r\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)a = r^2\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)\frac{r}{a} = r^2\frac{a}{r} = ra.$$

1.1.2.6. Ta có

$$^t\overline{\Gamma_r(a)} = \Gamma_r(a), \text{ do đó } {}^t\bar{a}\cdot\Gamma_r(a) = r\cdot{}^t\bar{a}.$$

Thật vậy,

$$^t\overline{\Gamma_r(a)} = {}^t\overline{r\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)} = r\cdot{}^t\overline{\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)} = r\cdot\Gamma\left(\frac{a}{r}\right) = \Gamma_r(a).$$

Hơn nữa,

$$^t\bar{a}\cdot\Gamma_r(a) = {}^t\bar{a}\cdot r\Gamma\left(\frac{a}{r}\right) = r^2\cdot\frac{{}^t\bar{a}}{r}\Gamma\left(\frac{a}{r}\right) = r^2\cdot\frac{{}^t\bar{a}}{r} = r\cdot{}^t\bar{a}.$$

1.1.2.7. Ta có

$$\Gamma_r(a)^2 = (r - v_r(a)) \cdot \Gamma_r(a) + r \cdot v_r(a) I = a\,{}^t\bar{a} + v_r(a)^2 \cdot I.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\Gamma_r(a)^2 = r^2 \Gamma\left(\frac{a}{r}\right)^2 &= r^2\left[\left(1 - v\left(\frac{a}{r}\right)\right)\Gamma\left(\frac{a}{r}\right) + v\left(\frac{a}{r}\right) I\right] \\ &= (r - v_r(a)) r\Gamma\left(\frac{a}{r}\right) + r v_r(a) I \\ &= (r - v_r(a))\Gamma_r(a) + r v_r(a) I,\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\Gamma_r(a)^2 = r^2 \Gamma\left(\frac{a}{r}\right)^2 &= r^2\left(\frac{a}{r} \cdot \frac{{}^t\bar{a}}{r} + v\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdot I\right) \\ &= a\,{}^t\bar{a} + r^2 v\left(\frac{a}{r}\right)^2 I \\ &= a \cdot {}^t\bar{a} + v_r(a)^2 I.\end{aligned}$$

1.1.2.8. Ta có

$$\Gamma_r(a)^{-1} = \frac{1}{r v_r(a)}\left(\Gamma_r(a) + (v_r(a) - r) I\right) = \frac{1}{r v_r(a)}\left(\frac{a \cdot {}^t\bar{a}}{r - v_r(a)} - rI\right).$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned}\Gamma_r(a)^{-1} = \left(r \cdot \Gamma\left(\frac{a}{r}\right)\right)^{-1} &= \frac{1}{r} \cdot \Gamma\left(\frac{a}{r}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{v\left(\frac{a}{r}\right)}\left(\Gamma\left(\frac{a}{r}\right) + \left(v\left(\frac{a}{r}\right) - 1\right) I\right) \\ &= \frac{1}{v_r(a)}\left(\frac{1}{r} \cdot \Gamma_r(a) + \frac{1}{r}(v_r(a) - r) I\right) \\ &= \frac{1}{r v_r(a)}\left(\Gamma_r(a) + (v_r(a) - r) I\right).\end{aligned}$$

Ngoài ra ta có

$$\Gamma_r(a)^{-1} = \frac{1}{r}\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)^{-1} = \frac{1}{rv\left(\frac{a}{r}\right)}\left(\frac{a\cdot{}^t\bar{a}}{r^2\left(1-v\left(\frac{a}{r}\right)\right)} - I\right)$$

$$= \frac{1}{v_r(a)}\left(\frac{a\cdot{}^t\bar{a}}{r(r-v_r(a))} - I\right) = \frac{1}{rv_r(a)}\left(\frac{a\cdot{}^t\bar{a}}{r-v_r(a)} - rI\right).$$

1.1.2.9. Ta có

$$\Gamma_r(a)^{-2} = \frac{1}{r^3\cdot v_r(a)}\left(-a\cdot{}^t\bar{a}+r^2I\right).$$

Chứng minh.

$$\Gamma_r(a)^{-2} = \frac{1}{r^2}\cdot\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)^{-2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{v\left(\frac{a}{r}\right)}\left(-\frac{a\cdot{}^t\bar{a}}{r^2}+I\right)$$

$$= \frac{1}{r^3v_r(a)}\left(-a\cdot{}^t\bar{a}+r^2I\right).$$

1.1.2.10. $$\det\Gamma_r(a) = r(-v_r(a))^{k-1} = r\left(-\sqrt{r^2-\|a\|^2}\right)^{k-1}.$$

Thật vậy,

$$\det\Gamma_r(a) = \det\left(r\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)\right)$$

$$= r^k\det\Gamma\left(\frac{a}{r}\right) = r^k\left(-v\left(\frac{a}{r}\right)\right)^{k-1}$$

$$= r^k\left(-\sqrt{1-\left\|\frac{a}{r}\right\|^2}\right)^{k-1} = r\left(-\sqrt{r^2-\|a\|^2}\right)^{k-1}.$$

1.1.2.11. Ta có

$$g_{Aa}{}^r = A\cdot g_a{}^r\cdot A^{-1} \text{ với } A\in U(n).$$

Chứng minh. Để tính g^r_{Aa}, ta có