ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

HOÀNG KIM CHI

KHÔNG GIAN SOBOLEV NGHIỆM YẾU CỦA PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

HOÀNG KIM CHI

KHÔNG GIAN SOBOLEV NGHIỆM YẾU CỦA PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. HÀ TIẾN NGOẠN

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và sự chỉ bảo nghiêm khắc của PGS.TS Hà Tiến Ngoạn. Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc đến thầy giáo.

Tôi cũng xin kính gửi lời cảm ơn chân thành đến đến các thầy giáo, cô giáo trong trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cũng như các thầy cô giáo tham gia giảng dạy khóa học cao học 2010-2012, những người đã đem hết tâm huyết và sự nhiệt tình để giảng dạy và trang bị cho chúng tôi nhiều kiến thức cơ sở.

Tôi xin cảm ơn tập thể giáo viên trường Đại học Hàng Hải nơi tôi công tác đã giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt khóa học cũng như quá trình làm luận văn. Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè thân thiết những người luôn động viên chia sẻ, giúp tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 07 năm 2012.

Tác giả

Hoàng Kim Chi

Bảng kí hiệu.

$\mathbb{N}$: tập số tự nhiên.

$\mathbb{R}^n$: không gian n chiều.

$\mathcal{H}$: không gian Hilbert.

L: toán tử tuyến tính.

I: ánh xạ đồng nhất.

D^α: đạo hàm bậc α.

MỞ ĐẦU

Một số phương trình elliptic cấp hai thường được suy ra từ các định luật bảo toàn. Do đó, nghiệm của phương trình này có thể được mở rộng, không nhất thiết thuộc lớp C^2, mà chỉ cần thuộc lớp $W^{1,2}$ và thỏa mãn một đẳng thức tích phân với mọi hàm thử v thuộc lớp $W_0^{1,2}$.

Dựa trên các tài liệu [1], [2], luận văn đã trình bày một cách hệ thống lý thuyết lớp nghiệm suy rộng cho phương trình elliptic tuyến tính cấp hai dạng bảo toàn.

Luận văn gồm hai chương I và II. Trong chương I, luận văn trình bày các không gian Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ và $W_0^{k,p}(\Omega)$ cùng các định lý nhúng.

Chương II là nội dung chính của luận văn, trong đó trình bày khái niệm nghiệm yếu của phương trình, nghiệm yếu của bài toán Dirichlet và định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu. Luận văn cũng trình bày độ trơn của nghiệm yếu trong đó khẳng định: khi các hệ số vế phải của phương trình cho trước trên biên thuộc lớp $C^\infty(\partial\Omega)$ thì nghiệm yếu $u(x)$ sẽ khả vi vô hạn trong $\overline{\Omega}$.

Chương 1

KHÔNG GIAN SOBOLEV

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị.

Trong phần này ta sẽ liệt kê một số định lý và định nghĩa cần thiết:

Định lý 1.1. (Định lý Riesz) *Với mọi phiếm hàm tuyến tính bị chặn F trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$ luôn tồn tại một phần tử xác định duy nhất $f \in \mathcal{H}$ sao cho $F(x) = (x, f)$ với mỗi $x \in \mathcal{H}$ và $\|F\| = \|f\|$ và đồng thời ta cũng có:*

$$\begin{aligned} (x, f) &= \frac{F(x)}{F(f)} \|f\|^2 \\ \|F\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, f)|}{\|x\|} \\ \|f\|^2 &= \quad (f, f) \quad = F(f). \end{aligned}$$

Định lý 1.2. *Giả sử T là ánh xạ tuyến tính compact của không gian tuyến tính định chuẩn V vào chính nó. Khi đó hoặc:*
i) phương trình thuần nhất $x - Tx = 0$ có nghiệm không tầm thường $x \in V$ hoặc:
ii) với mọi $y \in V$ phương trình $x - Tx = y$ có nghiệm được xác định duy nhất $x \in V$.
Hơn nữa, trong trường hợp ii) toán tử $(I - T)^{-1}$ mà sự tồn tại của nó đã được khẳng định là bị chặn.

Định lý 1.3. (Định lý Lax-Milgram) *Giả sử B là dạng song tuyến tính* *bức, bị chặn trên không gian Hilbert, tức là*

$$i) \exists M > 0 : |B(x,y)| \leq M \|x\| \|y\|, \forall x, y \in \mathcal{H}$$

$$ii) \exists \lambda > 0 : B(x,x) \geq \lambda x^2, \forall x \in \mathcal{H}.$$

Khi đó, với mọi phiếm hàm tuyến tính bị chặn $F \in \mathcal{H}^*$, tồn tại duy nhất một phần tử $f \in \mathcal{H}$ sao cho:

$$B(x,f) = F(x) \text{ với mọi } x \in \mathcal{H}.$$

Định lý 1.4. *Giả sử $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert và T là ánh xạ compact từ $\mathcal{H}$ vào chính nó. Khi đó, tồn tại một tập đếm được $\Lambda \subset \mathbb{R}$ không có điểm giới hạn trừ ra có thể $\lambda = 0$ sao cho: nếu $\lambda \neq 0, \lambda \notin \Lambda$ phương trình*

$$\lambda x - Tx = y, \quad \lambda x - T^* x = y \tag{1.1}$$

có nghiệm xác định duy nhất $x \in \mathcal{H}$ với mọi $y \in \mathcal{H}$ và các ánh xạ ngược $(\lambda I - T)^{-1}, (\lambda I - T^*)^{-1}$ bị chặn. Nếu $\lambda \in \Lambda$, các không gian con không của ánh xạ $\lambda I - T, \lambda I - T^*$ có số chiều dương và hữu hạn, còn phương trình (1.1) giải được nếu và chỉ nếu y trực giao với không gian con không của $\lambda I - T^*$ trong trường hợp thứ nhất và của $\lambda I - T$ trong trường hợp còn lại.

Định lý 1.5. *Một dãy bị chặn trong không gian Hilbert chứa một dãy con hội tụ yếu.*

Định nghĩa 1.1. Toán tử vi phân đạo hàm riêng cấp hai dạng không bảo toàn có dạng:

$$Lu = a^{\mathrm{ij}}(x) D_{\mathrm{ij}} u + b^i(x) D_i u + c(x) u; \quad a^{\mathrm{ij}} = a^{ji}$$

trong đó $x = (x_1, ..., x_n)$ nằm trong miền Ω của $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

L là elliptic tại điểm $x \in \Omega$ nếu thỏa mãn ma trận $\left[a^{\mathrm{ij}}(x)\right]$ là xác định dương. Vậy nếu $\lambda(x), \Delta(x)$ lần lượt là giá trị cực tiểu và cực đại của các giá trị riêng của $\left[a^{\mathrm{ij}}(x)\right]$ khi đó:

$$0 < \lambda(x) |\xi|^2 \leq a^{\mathrm{ij}}(x) \xi_i \xi_j \leq \Delta(x) |\xi|^2$$

với mọi $\xi = \xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Nếu $\lambda > 0$ trong Ω, khi đó L là elliptic trong Ω và elliptic ngặt nếu $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ với hằng số $\lambda_0 > 0$.

Định lý 1.6. *Cho L là elliptic ngặt trong miền Ω bị chặn, với $c \leq 0$, f và các hệ số của L thuộc vào $C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Giả sử rằng Ω là một miền của $C^{2,\alpha}$ và $\varphi \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Khi đó, bài toán Dirichlet*

$$Lu = f \text{ trong } \Omega, \quad u = \varphi \text{ trên } \partial\Omega$$

có duy nhất nghiệm nằm trong $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Định lý 1.7. *Cho Ω là một miền $C^{k+2,\alpha}$ $(k \geq 0)$ và $\varphi \in C^{k+2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Giả sử u là một hàm thuộc $C^0\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ thỏa mãn $Lu = f$ trong Ω. $u = \varphi$ trên $\partial\Omega$, trong đó f và các hệ số của toán tử elliptic ngặt thuộc $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Khi đó $u \in C^{k+2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.*

1.2 Không gian $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$; $\mathrm{W}_0^{k,p}(\Omega)$.

Một trong những bài toán quan trọng của phương trình đạo hàm riêng là phương trình Poisson:

$$\Delta u = f \tag{1.2}$$

Nghiệm của phương trình (1.2) thỏa mãn đồng nhất thức tích phân:

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{DuD}\varphi dx = -\int\limits_{\Omega} f\varphi dx$$

trong đó

$u = u(x_1, ..., x_n)$ là ẩn hàm,

$f = f(x_1, ..., x_n)$ là hàm số được cho trước,

$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n) \in C_0^1(\Omega)$ là không gian các hàm khả vi liên tục và có giá compact,

$\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$,