ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

TRƯƠNG THỊ HẢI VÂN

PHÉP CHIẾU XUỐNG TẬP LỒI VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2012

Mục lục

Lời cảm ơn

Lời đầu tiên của khóa luận này em xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới thầy giáo hướng dẫn Giáo sư Lê Dũng Mưu đã giao đề tài và tận tình hướng dẫn em trong quá trình hoàn thành khóa luận này. Nhân dịp này em xin gửi lời cám ơn của mình tời toàn bộ các thầy cô giáo trong khoa Toán - Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên đã giảng dạy và giúp đỡ chúng em trong suốt quá trình học tập tại khoa.

Đồng thời, tôi xin cảm ơn các bạn trong lớp K4 nghành Toán ứng dụng đã nhiệt tình giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại lớp.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 06 năm 2012.

Người viết Luận văn

Trương Thị Hải Vân

Mở đầu

Giải tích lồi là một môn cơ bản của giải tích hiện đại, nghiên cứu về tập lồi, hàm lồi cùng với những vấn đề liên quan. Bộ môn này có vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác của toán học ứng dụng, đặc biệt là trong tối ưu hóa, bất đẳng thức biến phân, các bài toán cân bằng v.v..

Sau các kết quả đầu tiên của H.Minkowski (1910) về tập lồi và hàm lồi, lý thuyết giải tích lồi đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học. Lý thuyết giải tích lồi được nghiên cứu nhiều trong khoảng bốn chục năm nay bởi các công trình nổi tiếng của H. Minkowski, C.Caratheodory, W.Fenchel, J.J.Moreau, R.T.Rockafellar, L.Klee, A.Brondsted, W.V.Jensen, G.Choquet và nhiều tác giả khác.

Phép chiếu xuống một tập lồi là một đề tài quan trọng trong giải tích lồi và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau, đặc biệt trong toán học. Trong không gian Hilbert, phép chiếu xuống tập lồi đóng có nhiều tính chất quan trọng. Việc tồn tại và tính duy nhất của hình chiếu lên một tập lồi đóng là cơ sở để chứng minh tính tồn tại và duy nhất của nhiều bài toán khác nhau trong giải tích ứng dụng như lý thuyết xấp xỉ, tối ưu hóa, bất đẳng thức biến phân và trong các vấn đề khác.

Mục đích chính của bản luận văn này là trình bày những tính chất cơ bản của phép chiếu xuống một tập lồi đóng trong không gian Hilbert và một số ứng dụng của phép chiếu. Cụ thể là sử dụng phép chiếu để chứng minh các định lí tách, tính dưới đạo hàm, đặc biệt là để xây dựng thuật toán chiếu giải bài toán cân bằng.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày các kiến thức cơ bản về không gian Hilbert. Các kiến thức này sẽ được sử dụng trong các chương sau.

Chương 2: Khái niệm, tính chất cơ bản của tập lồi, phép chiếu xuống tập lồi đóng trong không gian Hilbert và một số trường hợp cụ thể.

Chương 3: Trình bày một số ứng dụng của phép chiếu trong giải tích lồi. Cụ thể là sử dụng phép chiếu để chứng minh các định lí tách, tính dưới đạo hàm, đặc biệt là để xây dựng thuật toán chiếu giải bài toán cân bằng.

Chương 1

Các kiến thức cơ bản về không gian Hilbert

Trong chương này ta nhắc lại một số kết quả sẽ được dùng trong các chương sau. Đó là một số khái niệm, các tính chất cơ bản của không gian Hilbert. Các kết quả này có thể tìm thấy trong [1], [5].

1.1 Khái niệm về không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1. *Cho $\mathcal{H}$ là một không gian trên trường K. Tích vô hướng xác định trên $\mathcal{H}$ là một ánh xạ xác định như sau*

$$\begin{aligned} \langle\, .\, ,\, .\rangle \,:\, &\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to K \\ &(x, y) \quad \to \langle x, y\rangle\, . \end{aligned}$$

thỏa mãn các tiên đề sau

i, $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ *với mọi* $x, y \in \mathcal{H}$.

ii, $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ *với mọi* $x, y, z \in \mathcal{H}$.

iii, $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$ *với mọi* $x, y \in \mathcal{H}$ *và* $\lambda \in K$.

iv, $\langle x, x\rangle \geq 0$ *với mọi* $x \in \mathcal{H}$ *và* $\langle x, x\rangle = 0$ *khi và chỉ khi* $x = 0$.

$\langle x, y\rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai véctơ x và y. Cặp $(\mathcal{H}, \langle . , . \rangle)$ được gọi là không gian tiền Hilbert (hay còn gọi là không gian Unita).

Từ định nghĩa ta nhận thấy rằng khi K là trường số thực thì tích vô hướng là một dạng song tuyến tính xác định trên $\mathcal{H}$.

Ví dụ 1.1. Lấy $\mathcal{H} = \mathcal{R}^n$
với $x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathcal{H}$ và biểu thức

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

xác định một tích vô hướng trên $\mathcal{R}^n$.

Ví dụ 1.2. Lấy $H = C_{[0,1]}$ không gian gồm các hàm liên tục trên $[0, 1]$ nhận giá trị phức, với $x, y \in H$ biểu thức

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt,$$

xác định một tích vô hướng trên $C_{[0,1]}$. Khi đó không gian này là một không gian tiền Hilbert và thường kí hiệu $C^L_{[0,1]}$.

Định lí 1.1. *Cho* $\mathcal{H}$ *là không gian tiền Hilbert với* $x, y \in \mathcal{H}$ *ta luôn có bất đẳng thức sau* $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle . \langle y, y\rangle$. *Bất đẳng thức này còn gọi là bất đẳng thức Schwarz.*

Nhận xét 1.1. *Trong bất đẳng thức Schwarz dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi* x, y *phụ thuộc tuyến tính.*

Định lí 1.2. *Cho* $\mathcal{H}$ *là không gian tiền Hilbert. Khi đó* $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ $, x \in \mathcal{H}$ *xác định một chuẩn trên* $\mathcal{H}$.

Định nghĩa 1.2. *Cho không gian tiền Hilbert* $\mathcal{H}$. *Nếu* $\mathcal{H}$ *là không gian đầy đủ thì ta gọi* $\mathcal{H}$ *là không gian Hilbert.*

1.2 Một số tính chất cơ bản

Định lí 1.3. *Cho $\mathcal{H}$ là một không gian tiền Hilbert. Khi đó*

$$\langle\, , \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to C$$

là một hàm liên tục.

Chứng minh.

Cho $(x_n), (y_n)$ là hai dãy trong không gian tiền Hilbert $\mathcal{H}$ lần lượt hội tụ về x_0 và y_0. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| &\le |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y_0\rangle| + |\langle x_n, y_0\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y_0\rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0\rangle| \\ &\le \|x_n\| \, \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \, \|y_0\| \, . \end{aligned}$$

Theo giả thiết (x_n) hội tụ trong $\mathcal{H}$ nên nó bị chặn, nghĩa là tồn tại số $M > 0$ sao cho $\|x_n\| \le M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Vì vậy, ta có

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \le M \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \, \|y_0\| \, .$$

Chuyển qua giới hạn ta được

$$\lim_{n\to\infty} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| = 0.$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Định lí 1.4. *Cho $(X, \|\ \|)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn trên trường K. Giả sử với mọi x, y thuộc X thỏa mãn $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$. Khi đó trên X có một tích vô hướng sao cho $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$.*

Định lí 1.5. *Cho M là một tập lồi, đóng và khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Khi đó mỗi $x \in \mathcal{H}$ tồn tại duy nhất một phần tử y thuộc M sao cho $\|x - y\| = d(x, M)$.*

Định nghĩa 1.3. *Hai phần tử x, y trong không gian tiền Hilbert $\mathcal{H}$ được gọi là trực giao nếu $\langle x, y\rangle = 0$, kí hiệu $x \perp y$.*

Định lí 1.6. *Giả sử M là một không gian con đóng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Khi đó mỗi phần tử $x \in \mathcal{H}$ được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $x = y + z$, trong đó $y \in M$ và $z \in M^{\perp}$ được gọi là hình chiếu trực giao của x lên M.*

Chứng minh.

Nếu $x \in M$ thì đặt $y = x, z = 0$.

Nếu $x \notin M$ thì M là lồi đóng nên tồn tại duy nhất $y \in M$ sao cho $\|x - y\| = d\left(x, M\right)$.

Đặt $z = x - y$, ta có $x = y + z$. Ta phải chứng minh $z \in M^{\perp}$.

Thật vậy, với mọi $\alpha \in K,\ u \in M$ ta có

$$\begin{aligned}\|z\| = \|x - y\| &\le \|x - (y + \alpha u)\|\\ &= \|z - \alpha u\|.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\|z\|^2 &\le \langle z - \alpha u, z - \alpha u\rangle\\ &= \|z\|^2 - \alpha\langle u, z\rangle - \bar{\alpha}\langle z, u\rangle + \alpha^2\|u\|^2.\end{aligned}$$

Chọn $\alpha = \langle z, u\rangle$ và $\|u\| = 1$.

Ta được $0 \le -|\langle z, u\rangle|^2$.

Suy ra $\langle z, u\rangle = 0$ với mọi $u \in M, \|u\| = 1$.

Vậy $z \in M^{\perp}$.

Bây giờ ta chứng minh sự biểu diễn duy nhất, giả sử $x = y_1 + z_1$ với $y_1 \in M,\ z_1 \in M^{\perp}$.

Khi đó $y - y_1 = z_1 - z$ nên $y - y_1 \in M$ và $y - y_1 \in M^{\perp}$, suy ra $\langle y - y_1, y - y_1\rangle = 0$. Vậy $y = y_1$, do đó $z = z_1$.

Từ tính duy nhất của biểu diễn ta có thể viết $X = M \oplus M^{\perp}$.

Vậy định lý được chứng minh. □