ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

ĐỖ THỊ THÚY QUỲNH

TRÒ CHƠI MA TRẬN VÀ QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – –

ĐỖ THỊ THÚY QUỲNH

TRÒ CHƠI MA TRẬN VÀ QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60.46.36**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. TRẦN VŨ THIỆU

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Quy hoạch tuyến tính là bài toán tối ưu đơn giản nhất. Đó là bài toán tìm cực tiểu (hay cực đại) của một hàm tuyến tính với các ràng buộc đẳng thức hay bất đẳng thức tuyến tính. Quy hoạch tuyến tính có nhiều ứng dụng rộng rãi trong lý thuyết và thực tiễn, nói riêng trong lý thuyết trò chơi. Phương pháp đơn hình là phương pháp quen thuộc, có hiệu qủa để giải bài toán quy hoạch tuyến tính và các bài toán đưa được về quy hoạch tuyến tính.

Trong bài toán quy hoạch tuyến tính nói riêng và trong bài toán tối ưu nói chung, chỉ có một chủ thể (cá nhân, tập thể hay nhà nước, ...). Có một hàm mục tiêu (biểu thị lợi ích hay chi phí) duy nhất đại diện cho chủ thể đó. Mục đích của chủ thể này là tìm một giải pháp trong tập chiến lược hay tập phương án có thể, sao cho giải pháp đó là tốt nhất cho chủ thể theo mục tiêu đã đề ra (hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất). Trong thực tế, một hoạt động hay một vấn đề nào đó thường có nhiều chủ thể (đối tác) cùng tham gia. Mỗi chủ thể đều có một hàm mục tiêu và tập chiến lược riêng của mình và mỗi chủ thể đều muốn tìm một chiến lược hay phương án tối ưu cho mình. Một phương án tối ưu cho tất cả các đối tác như vậy thường không tồn tại, vì lợi ích của các đối tác nhiều khi đối kháng nhau. Do đó, một phương án tốt cho đối tác này có thể lại không tốt cho đối tác kia. Từ đó, hình thành nên khái niệm *tối ưu Pareto* và khái niệm *cân bằng Nash*. Về đại thể, có thể nói đó là trạng thái mà mỗi đối tác cần tuân thủ thực hiện, nếu không muốn lợi ích của mình bị thua thiệt hơn. Sau đó đã hình thành một lý thuyết toán học, có tên gọi *lý thuyết* *trò chơi* nhằm nghiên cứu và tìm ra giải pháp có lợi nhất cho mỗi đối tác (người tham gia chơi) trong các tình huống tương tự. Trong thời đại hiện nay, do các hoạt động và lợi ích đều ảnh hưởng qua lại và liên hệ mật thiết với nhau, nên lý thuyết trò chơi, đặc biệt là các trò chơi vi phân và trò chơi kinh tế, rất được quan tâm nghiên cứu.

Trò chơi ma trận là một dạng trò chơi đơn giản nhất. Đó là trò chơi đối kháng, hai người với tổng bằng 0, nghĩa là số tiền thắng cuộc của người này bằng số tiền thua cuộc của người kia và ngược lại. Trò chơi ma trận có mối liên hệ chặt chẽ với quy hoạch tuyến tính. Có thể quy việc tìm chiến lược chơi tối ưu của trò chơi ma trận về việc tìm nghiệm của một cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau và ngược lại, mỗi cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau lại tương đương với một trò chơi ma trận.

Luận văn đề cập tới trò chơi ma trận, trình bày những khái niệm cơ bản về trò chơi ma trận, phân tích mối quan hệ giữa trò chơi ma trận với quy hoạch tuyến tính và nêu phương pháp tìm chiến lược tối ưu của trò chơi ma trận thông qua việc giải số bài toán quy hoạch tuyến tính gốc hay đối ngẫu. Việc làm này có lợi cho việc đi sâu tìm hiểu sau này về lý thuyết trò chơi nói chung và những ứng dụng thực tiễn của lý thuyết toán học này nói riêng.

Nội dung luận văn được chia thành hai chương.

Chương 1 với tiêu đề **"Bài toán quy hoạh tuyến tính"** giới thiệu nội dung và các tính chất cơ bản của bài toán quy hoạch tuyến tính, khái niệm bài toán đối ngẫu và các quan hệ đối ngẫu trong quy hoạch tuyến tính. Phương pháp đơn hình quen thuộc, bao gồm thuật toán đơn hình gốc và thuật toán đơn hình đối ngẫu, cũng được nhắc lại ở chương này. Các thuật toán đơn hình sẽ được dùng đến ở chương sau để tìm chiến lược tối ưu của hai người chơi trong trò chơi ma trận đề cập tới ở chương sau.

Chương 2 với tiêu đề **"Bài toán trò chơi ma trận"** trình bày các khái niệm cơ bản về bài toán trò chơi ma trận như qui tắc chơi, cách trả tiền, hàm thắng cuộc, điểm yên ngựa, chiến lược đơn, chiến lược hỗn hợp, chiến lược tối ưu, v.v ... Phân tích mối quan hệ giữa trò chơi ma trận và quy hoạch tuyến tính. Việc tìm chiến lược tối ưu của mỗi người chơi trong trò chơi ma trận đưa được về việc tìm nghiệm của một cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau và ngược lại, mỗi cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau lại có thể mô tả tương đương như một trò chơi ma trận. Để làm ví dụ minh hoạ cho trò chơi ma trận, cuối chương xét trò chơi Poker, một loại trò chơi giải trí trên mạng. Trong trường hợp đơn giản, trò chơi này có thể mô tả như một trò chơi ma trận với các chiến lược đơn và ma trận trả tiền hoàn toàn xác định.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn này mới chỉ đề cập tới những nội dung cơ bản của bài toán trò chơi ma trận trong mối quan hệ với qui hoạch tuyến tính, chưa đi sâu vào các chi tiết. Trong quá trình viết luận văn cũng như trong xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những sai sót nhất định. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Nhân dịp này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy hướng dẫn GS-TS Trần Vũ Thiệu đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy, cô giáo Trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học-Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn tập thể bạn bè cùng gia đình đã quan tâm giúp đỡ, động viên tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 07 năm 2012.

Người thực hiện

Đỗ Thị Thúy Quỳnh

Chương 1

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Chương này sẽ trình bày các kiến thức cơ bản về bài toán quy hoạch tuyến tính, bài toán đối ngẫu và các quan hệ đối ngẫu trong quy hoạch tuyến tính, cũng như phương pháp đơn hình (thuật toán đơn hình gốc và đơn hình đối ngẫu) giải quy hoạch tuyến tính. Nội dung của chương được tham khảo từ các tài liệu [1], [2] và [3].

1.1 NỘI DUNG BÀI TOÁN VÀ TÍNH CHẤT

1.1.1 NỘI DUNG BÀI TOÁN

A. Dạng tổng quát

Bài toán này có dạng: Tìm các số x_1, x_2,..., x_n thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(x) \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{\mathrm{ij}} x_j \le b_i, i = 1, ..., m_1, & (2.1) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{\mathrm{ij}} x_j \ge b_i, i = m_1 + 1, ..., m_1 + m_2, & (2.2) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{\mathrm{ij}} x_j = b_i, i = m_1 + m_2 + 1, ..., m, & (2.3) \\ x_j \ge 0, j = 1, ..., n_1, x_j \le 0, j = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2 \le n, & (2.4) \end{cases}$$

trong đó a_{ij},b_i,c_j là các hằng số thực cho trước.

Trong bài toán trên, f gọi là *hàm mục tiêu*, mỗi hệ thức ở (2.1)-(2.4) gọi là một *ràng buộc*. Mỗi ràng buộc (2.1)-(2.3) gọi là một *ràng buộc chính* liên kết nhiều biến với nhau (dạng *đẳng thức* hay *bất đẳng thức*), mỗi ràng buộc $x_j \geq 0$ hay $x_j \leq 0$ gọi là một *ràng buộc về dấu*.

Điểm x = $(x_1,\ x_2, ...\ ,\ x_n) \in R^n$ thỏa mãn mọi ràng buộc gọi là một *điểm chấp nhận được*, hay một *phương án*. Tập hợp tất cả các phương án, ký hiệu D, gọi là *tập rằng buộc* hay *miền chấp nhận được* . Một phương án đạt cực tiểu của hàm mục tiêu gọi là một *phương án tối ưu* hay một *lời giải* của bài toán đã cho.

Bài toán có ít nhất một phương án tối ưu gọi là bài toán *có lời giải*. Bài toán không có phương án (tập rằng buộc rỗng D = $\emptyset$) hoặc có phương án nhưng không có phương án tối ưu, do hàm mục tiêu giảm vô hạn (bài toán tìm min) hoặc tăng vô hạn (bài toán tìm max), gọi là bài toán *không có lời giải*.

B. Dạng chính tắc:

$$\begin{cases} f(x) \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, ..., m, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n, \end{cases}$$

(đặc điểm của bài toán này là ràng buộc chính chỉ là đẳng thức và mọi biến đều không âm).

C. Dạng chuẩn tắc:

$$\begin{cases} f(x) \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, 2, ..., m, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n, \end{cases}$$

(đặc điểm của bài toán này là ràng buộc chính chỉ gồm các bất đẳng thức $\geq$ đối với bài toán min hoặc $\leq$ đối với bài toán max và mọi biến đều không âm).

Để viết bài toán gọn hơn,ta dùng các kí hiệu véc tơ và ma trận như sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \qquad A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix};$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}; \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(A là ma trận m $\times$ n gồm các hệ số ở vế trái ràng buộc chính, A_j là véc tơ cột thứ j của A tương ứng với biến x_j, b là véc tơ các hệ số ở vế phải ràng buộc chính, c là véc tơ các hệ số ở hàm mục tiêu, x là véc tơ các ẩn số, 0 là véc tơ không).

Với các kí hiệu trên,bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc có dạng :

$\min \{f(x) = \langle c, x\rangle : \text{Ax} = b, x \geq 0\}$

hay $\max \{f(x) = \langle c, x\rangle : \text{Ax} = b, x \geq 0\}$

($\langle c, x\rangle$ là tích vô hướng của hai véc tơ c và x)

Bài toán quy hoạch tuyến tính chuẩn tắc có dạng :

$\min \{f(x) = \langle c, x\rangle : \text{Ax} \geq b, x \geq 0\}$

hay $\max \{f(x) = \langle c, x\rangle : \text{Ax} \leq b, x \geq 0\}$.

1.1.2 TÍNH CHẤT BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

Tính chất 1.1. *Tập hợp D các phương án của bài toán qui hoạch tuyến tính (dạng bất kỳ) là một tập lồi đa diện.*