BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC KHOA HỌC, ĐH THÁI NGUYÊN

PHẠM NGUYỄN PHƯƠNG THỦY

BIỂU DIỄN MỘT SỐ DẠNG ĐA THỨC VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : **60 46 40**

Giáo viên hướng dẫn:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN, 2012

Mục lục

Mở đầu

Trong chương trình toán học phổ thông, đa thức là một chuyên đề quan trọng và có ứng dụng rất đa dạng và hiệu quả. Trong thực tiễn, đa thức và các ứng dụng của nó luôn là vấn đề thời sự và là chuyên đề hết sức cần thiết trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở bậc học phổ thông, đồng thời sự phát hiện các ứng dụng đa dạng của nó cũng luôn đem lại sự hấp dẫn đối với nhiều đối tượng học sinh và giáo viên khi nghiên cứu vấn đề này.

Mục tiêu của Luận văn *"Biểu diễn một số dạng đa thức và áp dụng trong đại số"* nhằm trình bày một số vấn đề liên quan đến các đồng nhất thức đại số sinh bởi đa thức cùng với một số ứng dụng của nó nhằm tạo ra được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh trung học phổ thông.

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 3 chương.

Chương 1 trình bày tóm tắt các tính chất của đa thức đại số. Trong chương này cũng trình bày một số ví dụ và bài toán về mối liên hệ giữa các đồng nhất thức đại số cũng như các ứng dụng của các đồng nhất thức này.

Chương 2 trình bày biểu diễn đa thức dương trên trục thực, trên nửa trục dương, trên một đoạn cho trước và biểu diễn một số đa thức đặc biệt khác (đa thức với hệ số nguyên, đa thức Trebyshev,...).

Chương 3 trình bày một số ứng dụng của đa thức trong tính toán, ước lượng, giải phương trình và các bài toán cực trị.

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin cảm ơn quý thầy, cô giảng dạy lớp cao học khóa 4 (2010 - 2012) đã mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong khoa học và cuộc sống.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy, cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 05 năm 2012.

Người viết Luận văn

Phạm Nguyễn Phương Thủy

Chương 1

Các tính chất của đa thức đại số

1.1 Định nghĩa. (Xem [2])

Cho vành A là một vành giao hoán có đơn vị. Ta gọi đa thức (trên A) bậc n biến x là một biểu thức có dạng :

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \, (a_n \neq 0)$$

trong đó các $a_i \in A$ được gọi là hệ số, a_n là hệ số cao nhất và a_0 là hệ số tự do của đa thức.
Nếu $a_i = 0;\ i = 1, 2, \ldots, n-1$ và $a_0 \neq 0$ thì ta có bậc của đa thức là 0.
Nếu $a_i = 0;\ \forall i = 0, 1, \ldots, n$ thì ta coi bậc của đa thức là $-\infty$ và gọi là đa thức không.
Tập hợp tất cả các đa thức với hệ số lấy trong vành A được kí hiệu là $A\,[x]$.
Khi $A = K$ là một trường thì $K\,[x]$ là một vành giao hoán có đơn vị. Ta thường xét $A = \mathbb{Z}$ hoặc $A = \mathbb{Q}$ hoặc $A = \mathbb{R}$ hoặc $A = \mathbb{C}$. Khi đó ta có các vành đa thức tương ứng là $\mathbb{Z}\,[x]$, $\mathbb{Q}\,[x]$, $\mathbb{R}\,[x]$, $\mathbb{C}\,[x]$.

1.2 Các phép tính trên đa thức

Cho hai đa thức

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

Ta định nghĩa các phép tính số học

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)\, x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})\, x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)\, x + \\ + a_0 + b_0$$

$$f(x) - g(x) = (a_n - b_n)\, x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})\, x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)\, x + \\ + a_0 - b_0$$

$$f(x)g(x) = c_{2n}x^{2n} + c_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + c_1x + c_0,$$

trong đó $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0,\ k = 0, \ldots, n.$

1.3 Các tính chất cơ bản

Định lý 1.1. (Xem [2]) Giả sử A là một trường, $f(x)$ và $g(x) \neq 0$ là hai đa thức của vành $A\,[x]$, thế thì bao giờ cũng có hai đa thức duy nhất $q(x)$ và $r(x)$ thuộc $A\,[x]$ sao cho

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

với $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Nếu $r(x) = 0$ ta nói $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Giả sử a là phần tử tùy ý của vành A, $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ là đa thức tùy ý của vành $A\,[x]$, phần tử $f\,(a) = a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1a + a_0$ có được bằng cách thay x bởi a được gọi là giá trị của $f(x)$ tại a.

Nếu $f\,(a) = 0$ thì ta gọi a là nghiệm của $f(x)$. Bài toán tìm nghiệm của $f(x)$ trong A gọi là giải phương trình đại số bậc n

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

trong A.

Định lý 1.2. (Xem [2]) Giả sử A là một trường, $a \in A, f(x) \in A\,[x]$. Dư số của phép chia $f(x)$ cho $(x - a)$ chính là $f\,(a)$.

Định lý 1.3. (Xem [2]) Số a là nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x - a)$.

Giả sử A là một trường, $a \in A, f(x) \in A[x]$ và m là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1. Khi đó a là nghiệm bội cấp m của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x-a)^m$ và $f(x)$ không chia hết cho $(x-a)^{m-1}$.
Trong trường hợp $m = 1$ thì ta gọi a là nghiệm đơn còn khi $m = 2$ thì a được gọi là nghiệm kép. Số nghiệm của một đa thức là tổng số nghiệm của đa thức đó kể cả bội của các nghiệm (nếu có). Vì vậy, người ta coi một đa thức có một nghiệm bội cấp m như một đa thức có m nghiệm trùng nhau.

- Lược đồ Horner

Giả sử
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in A[x]$$
(với A là một trường). Khi đó thương gần đúng của $f(x)$ cho $(x-a)$ là một đa thức có bậc bằng $n-1$, có dạng :
$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + a_0$$
trong đó
$$b_{n-1} = a_n,\ b_k = ab_{k+1} + a_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$
và số dư $r = ab_0 + a_0$.

Định lý 1.4 (Định lí Viète)**.** (Xem [2])
a) Giả sử phương trình
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{1.1}$$
có n nghiệm (thực hoặc phức) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì
$$\begin{cases} E_1(x) := x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ E_2(x) := x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n & = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots \\ E_n(x) := x_1x_2 \ldots x_n & = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases} \tag{1.2}$$
b) Ngược lại, nếu các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn hệ trên thì chúng là nghiệm của phương trình (1.1). Hệ (1.2) có n thành phần và ở vế trái của

thành phần thứ k có C_n^k số hạng.
c) Các hàm $E_1(x), E_2(x), \ldots, E_n(x)$ được gọi là hàm (đa thức) đối xứng sơ cấp Viète bậc $1, 2, \ldots, n$ tương ứng.

Định lý 1.5. (Xem [2]) Mọi đa thức bậc n đều có không quá n nghiệm thực.

Hệ quả 1.1. Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không.

Hệ quả 1.2. Nếu đa thức có bậc $\leq n$ mà nhận cùng một giá trị tại $n+1$ điểm khác nhau của đối số thì đa thức đó là đa thức hằng.

Hệ quả 1.3. Hai đa thức bậc $\leq n$ mà nhận giá trị bằng nhau tại $n+1$ giá trị khác nhau của đối số thì đồng nhất bằng nhau.

Định lý 1.6 (Gauss)**.** (Xem [2]) Mỗi đa thức $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ bậc n có đúng n nghiệm (tính cả bội của nghiệm).

Định lý 1.7. (Xem [2]) Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc n và có hệ số chính (hệ số bậc cao nhất) $a_n \neq 0$ đều có thể phân tích (duy nhất) thành nhân tử

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{m} (x - d_i) \prod_{k=1}^{s} \left(x^2 + b_k x + c_k\right)$$

với $d_i,\ b_k,\ c_k \in \mathbb{R},\ 2s + m = n,\ b_k^2 - 4c_k < 0,\ m,\ n \in \mathbb{N}^*$.

1.4 Ước, ước chung lớn nhất

Định nghĩa 1.1. (Xem [2]) Khi đa thức

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ \ (a_0 \neq 0)$$

được viết dưới dạng

$$P_n(x) = g(x)q(x)$$

với $\deg g > 0$ và $\deg q > 0$ thì ta nói g là ước của $P_n(x)$ và ta viết $g(x) | P_n(x)$ hay $P_n(x) \vdots g(x)$.
Nếu $g(x) | P(x)$ và $g(x) | Q(x)$ thì ta nói $g(x)$ là ước chung của $P(x)$ và $Q(x)$.
Nếu hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ chỉ có ước chung là các đa thức bậc 0 thì ta nói rằng chúng nguyên tố cùng nhau và viết $(P(x), Q(x)) = 1$.

Định lý 1.8. (Xem [2]) Điều kiện cần và đủ để hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ nguyên tố cùng nhau là tồn tại cặp đa thức $u(x)$ và $v(x)$ sao cho

$$P(x)u(x) + Q(x)v(x) = 1.$$

Nếu hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ (không đồng nhất với 0) có ước chung $d(x)$ là đa thức chia hết cho tất cả các ước chung khác thì $d(x)$ được gọi là ước chung lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$. Cũng như vậy, ta có ước chung lớn nhất của bộ nhiều đa thức.

Một số tính chất cơ bản.

Tính chất 1.1. (Xem [2]) Nếu các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau và các đa thức $f(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau thì các đa thức $f(x)$ và $g(x)h(x)$ cũng nguyên tố cùng nhau.

Tính chất 1.2. (Xem [2]) Nếu các đa thức $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(x)h(x)$ chia hết cho $g(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Tính chất 1.3. (Xem [2]) Nếu đa thức $f(x)$ chia hết cho các đa thức $g(x)$ và $h(x)$ với $g(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)h(x)$.

Tính chất 1.4. (Xem [2]) Nếu các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $[f(x)]^m$ và $[g(x)]^n$ sẽ nguyên tố cùng nhau với mọi m, n nguyên dương.

1.5 Quy tắc dấu Descartes

Xét dãy số thực a_0, a_1, a_2... (hữu hạn hoặc vô hạn) cho trước.

Định nghĩa 1.2. (Xem [2]) Chỉ số $m\,(m \geq 1)$ được gọi là vị trí (chỗ) đổi dấu của dãy nếu có $a_{m-1}a_m < 0$ hoặc là

$$a_{m-1} = a_{m-2} = \cdots = a_{m-(k+1)} = 0$$

và

$$a_{m-k}a_m < 0 \;\; (m > k \geq 2)\,.$$

Trong trường hợp thứ nhất thì a_{m-1} và a_m, còn trong trường hợp thứ hai thì a_{m-k} và a_m lập thành vị trí đổi dấu. Số lần đổi dấu (bằng số vị trí đổi dấu) của một dãy nào đó vẫn không thay đổi nếu các số hạng bằng 0 được bỏ đi còn những số hạng còn lại vẫn bảo toàn vị trí tương hỗ của chúng. Ta có các tính chất sau đây.

Tính chất 1.5. (Xem [2]) Các dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ có cùng một số lần đổi dấu.

Tính chất 1.6. (Xem [2]) Khi gạch bỏ các số hạng của dãy, số lần đổi dấu không tăng lên.

Tính chất 1.7. (Xem [2]) Khi đặt vào giữa các số hạng của dãy một số lượng tùy ý các số hạng bằng 0, số vị trí đổi dấu của dãy cũng không thay đổi.

Tính chất 1.8. (Xem [2]) Số vị trí đổi dấu sẽ không thay đổi nếu bên cạnh một số hạng nào đó của dãy ta đặt một số hạng mới có cùng dấu với số hạng đó.

Tính chất 1.9. (Xem [2]) Nếu $p_0 > 0,\ p_1 > 0,\ p_2 > 0$... thì các dãy

$$a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots$$

và

$$a_0p_0,\ a_1p_1,\ a_2p_2 \ldots$$

có cùng những vị trí đổi dấu.

Tính chất 1.10. Dãy $a_0,\ a_1 + a_0,\ a_2 + a_1, \ldots,\ a_n + a_{n-1},\ a_n$ có số vị trí đổi dấu không lớn hơn so với dãy $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$.

Định nghĩa 1.3. (Xem [2]) Ta gọi sự đổi dấu và vị trí đổi dấu của đa thức

$$P\left(x\right) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$$

chính là sự đổi dấu và vị trí đổi dấu của dãy hệ số

$$a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0.$$

- Quy tắc của dấu Descartes