ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐÀO VĂN PHƯƠNG

DƯỚI VI PHÂN CỦA HÀM LỒI TRONG KHÔNG GIAN BANACH VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2012

Mục lục

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS. Nguyễn Năng Tâm - trường Đại học sư phạm Hà Nội 2 đã hướng dẫn và chỉ bảo tận tình để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các Giáo sư của trường Đại học Khoa học, Viện Toán học, Đại học Thái Nguyên đã truyền thụ kiến thức cho tôi trong suốt quá trình học tập vừa qua.

Tôi xin cảm ơn cơ quan, bạn bè đồng nghiệp, gia đình đã chia sẻ, giúp đỡ, động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thiện luận văn này.

Hải phòng, ngày 19 tháng 7 năm 2012

Đào Văn Phương

Mở đầu

Giải tích lồi là một bộ phận quan trọng của giải tích toán học, nghiên cứu về tập lồi và hàm lồi. Trong giải tích lồi, khái niệm dưới vi phân là một trong những khái niệm cơ bản. Có thể xem dưới vi phân như là một mở rộng của khái niệm đạo hàm. Nhiều tác giả trong và ngoài nước đã nghiên cứu và thu được những kết quả quan trọng về dưới vi phân của hàm lồi và ứng dụng của nó trong giải tích phi tuyến cũng như trong các môn toán ứng dụng.

Luận văn này trình bày một cách có hệ thống những nội dung cơ bản nhất về dưới vi phân của hàm lồi trên không gian Banach và một số ứng dụng của nó vào lý thuyết tối ưu.

Luận văn gồm 3 chương. Chương 1 trình bày những kiến thức cơ bản về tập lồi và hàm lồi. Chương 2 trình bày dưới vi phân của hàm lồi trên không gian Banach. Chương 3 trình bày ứng dụng của dưới vi phân vào việc nghiên cứu bài toán tối ưu lồi.

Bảng kí hiệu

$\mathbb{R}$	đường thẳng thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclid n - chiều
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$	tập số thực suy rộng
$f : D \to \overline{\mathbb{R}}$	ánh xạ đi từ D vào $\overline{\mathbb{R}}$
$\delta\,(x\|D)$	hàm chỉ của tập D
E^*	không gian liên hợp của E
$\operatorname{int} A$	phần trong của A
$\overline{A}$	bao đóng của A
$domf$	miền hữu hiệu của f
$epif$	trên đồ thị của f
$f'(x)$	đạo hàm Fréchet của f tại x
$f'_G(x)$	đạo hàm Gâteaux của f tại x
$f'(x;v)$	đạo hàm theo hướng v của f tại x
$\partial f(x)$	dưới vi phân của f tại x
$\|\|.\|\|$	chuẩn trong không gian Banach
$\|x\|$	trị tuyệt đối của số x
$\langle x^*, x\rangle$	giá trị của x^* tại x
K_A	nón lồi sinh bởi A
$N_A(\bar{x})$	nón pháp của A tại $\bar{x}$
$affA$	bao lồi affine của A
coA	bao lồi của A
$f \leq g$	$f(x) \leq g(x)$ với mọi x

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng ta sẽ trình bày những khái niệm cơ bản nhất của tập lồi trong không gian Banach và hàm lồi trên không gian Banach cùng với những tính chất đặc trưng của nó. Những kiến thức trình bày trong chương này được chọn chủ yếu từ các tài liệu [1], [2], [4], [5], [6], [7], [8].

1.1 Không gian Banach

Cho E là một không gian vectơ trên trường số $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1. *Một chuẩn, kí hiệu* $||\cdot||$*, trong* E *là một ánh xạ đi từ* E *vào* $\mathbb{R}$ *thỏa mãn các điều kiện:*

1) $||x|| \geq 0$ *với mọi* $x \in E$ *;*

2) $||x|| = 0$ *khi và chỉ khi* $x = \theta$ *(*θ *là kí hiệu phần tử không);*

3) $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$ *với mọi số* $\lambda \in \mathbb{R}$ *và mọi* $x \in E$*;*

4) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *với mọi* $x, y \in E$*.*

Số $||x||$ được gọi là chuẩn (hay độ dài) của vectơ $x \in E$. Một không gian vectơ E cùng với một chuẩn xác định trong không gian ấy, được gọi là một không gian định chuẩn.

Mệnh đề 1.1. *Giả sử E là một không gian định chuẩn. Với mọi $x, y \in E$, đặt*

$$\rho(x, y) = ||x - y||$$

Khi đó, ρ là một metric trên E.

Định nghĩa 1.2. *Cho E là một không gian định chuẩn với chuẩn $\|.\|$. Nếu E với khoảng cách sinh bởi chuẩn của E: $\rho(x, y) = ||x - y||$, là một không gian metric đầy đủ thì E gọi là không gian Banach.*

Nếu không có giả thiết gì thêm, trong suốt luận văn này, không gian Banach được kí hiệu là E. Chuẩn trong các không gian Banach luôn được kí hiệu bởi $\|.\|$.

Định nghĩa 1.3. *Cho E là một không gian định chuẩn với chuẩn $\|.\|$. Ta gọi mỗi ánh xạ tuyến tính $x^* : E \to \mathbb{R}$ là một phiếm hàm tuyến tính xác định trên E.*

Nếu $x^* \in E^*$ và $x \in E$ thì giá trị của x^* tại x sẽ được kí hiệu là $\langle x^*, x\rangle$, nghĩa là $\langle x^*, x\rangle = x^*(x)$.

Dễ dàng kiểm tra được rằng, tập hợp tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên E với phép cộng ánh xạ tuyến tính và phép nhân ánh xạ tuyến tính với số thực lập thành một không gian tuyến tính thực. Ta gọi không gian này là *không gian liên hợp* của E và được kí hiệu là E^*. Không gian liên hợp của E^* gọi là *không gian liên hợp thư hai* của E và kí hiệu là E^{**}.

Định lí 1.1. *Không gian liên hợp E^* của E với chuẩn xác định bởi*

$$\|x^*\| = \sup\{\langle x^*, y\rangle :\ y \in E, \|y\| \neq 0\}$$

là một không gian Banach.

Tôpô τ_M sinh bởi metric của không gian định chuẩn E^* nêu trong định lý vừa nêu gọi là *tôpô mạnh* trong E^*.

Định nghĩa 1.4. *Tôpô τ_Y trong E^* gọi là tôpô yếu nếu hệ thống các lân cận của* 0 *của E^* là các tập có dạng*

$$\{x^* \in E^* :\ \langle x_i^{**}, x^*\rangle < \varepsilon,\ i = 1, ..., k\},$$

trong đó $x_i^{**} \in E^{**}$ với $i =, ..., k$ và $\varepsilon > 0$.

Định nghĩa 1.5. *Tôpô τ^* trong E^* gọi là tôpô yếu* nếu hệ thống các lân cận của* 0 *của E^* là các tập có dạng*

$$\{x^* \in E^* :\ \langle x^*, x_i\rangle < \varepsilon,\ i = 1, ..., k\},$$

trong đó $x_i \in E$ với $i = 1, ..., k$.

Định nghĩa 1.6. *Tập $A \subset E$ mà là đóng (compact, bị chặn) theo tô pô yếu trong E gọi là tập đóng (compact, bị chặn) yếu. Tập A đóng (compact, bị chặn) theo tô pô yếu* trong không gian liên hợp E^* của E thì gọi là tập đóng yếu* (compact yếu*, bị chặn yếu*) .*

1.2 Tập lồi

Giả sử E là một không gian Banach, $\mathbb{R}$ là tập số thực.

Định nghĩa 1.7. *Tập $A \subset E$ được gọi là lồi, nếu*

$$\forall x_1,\ x_2 \in A,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : 0 \le \lambda \le 1 \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)\, x_2 \in A.$$

Ví dụ 1.1. Cả không gian E là tập lồi. Tập $A = \emptyset$ là tập lồi.

Mệnh đề 1.2. *Giả $A_\alpha \subset E$ $(\alpha \in I)$ là các tập lồi, với I là tập chỉ số bất kì. Khi đó $A = \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ cũng lồi.*

Mệnh đề 1.3. *Giả sử tập $A_i \subset E$ lồi, $\lambda_i \in R$ $(i = 1, 2, ..., m)$. Khi đó $\lambda_1 A_1 + ... + \lambda_m A_m$ cũng là tập lồi.*

Mệnh đề 1.4. *Giả sử E_i là không gian Banach, tập $A_i \subset E_i$ lồi $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Khi đó tích Đềcác $A_1 \times ... \times A_m$ là tập lồi trong $E_1 \times ... \times E_m$.*

Mệnh đề 1.5. *Giả sử E_1, E_2 là các không gian Banach, $T : E_1 \to E_2$ là toán tử tuyến tính. Khi đó,*

a) $A \subset E_1$ lồi thì $T(A)$ lồi;

b) $B \subset E_2$ lồi thì nghịch ảnh $T^{-1}(B)$ của B là tập lồi.

Định nghĩa 1.8. *Véc tơ $x \in E$ được gọi là tổ hợp lồi của các véctơ $x_1, ..., x_m$ thuộc E, nếu $\exists \lambda_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, ..., m)\,,\ \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ sao cho*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i.$$

Định lí 1.2. *Giả sử tập $A \subset E$ lồi; $x_1, ..., x_m \in A$. Khi đó A chứa tất cả các tổ hợp lồi của $x_1, ..., x_m$.*

Định nghĩa 1.9. *Giả sử $A \subset E$. Giao của tất cả các tập lồi chứa A được gọi là bao lồi (convex hull) của tập A, kí hiệu là* co$A$.