□□I H□C TH□I NGUY□N
TR□ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM QUANG NGỌC

ỨNG DỤNG ĐỊNH THỨC VÀ MA TRẬN VÀO VIỆC GIẢI QUYẾT LỚP CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên — 2012

Mục lục

Mở đầu

Lý thuyết Đại số tuyến tính nói chung và lý thuyết định thức và ma trận nói riêng là kiến thức cơ bản của toán học. Nó là cơ sở để nghiên cứu các lý thuyết khác của toán học như hình học cao cấp, giải tích, toán kinh tế v.v... Ngoài ra nó còn có ứng dụng trong việc nghiên cứu một số nghành khoa học như vật lý, cơ lý thuyết, hóa học và một số nghành kỹ thuật khác .

Hiện nay các bài toán về đẳng thức và bất đẳng thức ta thường gặp trong rất nhiều các giáo trình, trong các kỳ thi học sinh giỏi và có rất nhiều phương pháp giải hay và độc đáo. Trong phạm vi đề tài này chúng tôi mạnh dạn trình bày một phương pháp tiếp cận khác đó là phương pháp giải dựa trên lý thuyết của ma trận và định thức .

Bố cục của luận văn như sau luận văn ngoài các phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo luận văn gồm có hai chương:

Chương 1: Lý thuyết ma trận, định thức và một số kiến thức có liên quan.

Chương 2: Ứng dụng lý thuyết ma trận và định thức vào lớp các bài toán chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức .

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Để hoàn thành luận văn này, tác giả đã được nhận sự hướng dẫn, giúp đỡ tận tình của PGS.TS Nông Quốc Chinh.

Nhân đây, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã quan tâm, hướng dẫn và đóng góp nhiều ý kiến qúy báu trong suốt quá trình hoàn thành luận văn của tác giả.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới tập thể các thầy cô giáo trong khoa Toán ĐHKH - ĐH Thái Nguyên vì sự dạy dỗ, giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng tác giả xin chân thành cảm ơn gia đình và bạn bè đã giúp đỡ và là nguồn động viên tinh thần lớn trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Kết quả đạt được trong bản luận văn này còn nhiều khiêm tốn và chắc hẳn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Do vậy, tác giả rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của thầy cô và các bạn bè để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn !

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2012.

Học viên

Phạm Quang Ngọc.

Chương 1.

Tóm tắt lý thuyết ma trận định thức và một số kiến thức liên quan

1.1. Ma trận, tính chất và các phép toán

1.1.1. Các định nghĩa

Ma trận A cấp $m \times n$ là một bảng m hàng (hay dòng), n cột được viết cố định như sau:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(với i = 1,2,....,m; j =1,2,.....n ; $a_{ij} \in R$ hoặc $a_{ij} \in C$).

Nếu $m = n$ thì ta nói A là ma trận vuông cấp n, kí hiệu $A = (a_{ij})_n$.
Ma trận $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ thu được từ ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ bằng cách chuyển dòng thành cột, cột thành dòng gọi là ma trận chuyển vị của ma trận A .
Ma trận vuông A được gọi là ma trận đối xứng nếu $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1, n}$.
Ma trận vuông A gọi là ma trận phản đối xứng nếu $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j = \overline{1, n}$.

Ma trận vuông A được gọi là ma trận đơn vị nếu mọi phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 1, các phần tử còn lại bằng 0 và ta kí hiệu I_n.

1.1.2. Tính chất và các phép toán

i) Phép nhân ma trận với một số

Tích của ma trận A với một số k là một ma trận B = k.A được xác định như sau:

$$B = (b_{i\,j})_{m\times n} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

ii) Phép cộng ma trận

Tổng của hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$là một ma trận $C = (c_{ij})_{m\times n}$ với $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Hiển nhiên ta cũng thấy phép cộng hai ma trận cũng có tính giao hoán và kết hợp

Tính giao hoán: A + B = B + A.

Tính kết hợp : A + (B + C) = (A + B) + C.

iii) Phép nhân các ma trận

Tích của hai ma trận $A = (a_{ik})_{m\times n}$ và $B = (b_{kj})_{n\times p}$ là một ma trận $C = (c_{ij})_{m\times p}$ được định nghĩa như sau:

$$C = A.B = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{m\times p}.$$

Ta chú ý phép nhân ma trận A với ma trận B chỉ thực hiện được nếu số cột của ma trận A bằng số dòng của ma trận B.

Phép nhân ma trận nói chung không có tính chất giao hoán. Tức là $A.B \neq B.A$.
Tuy nhiên phép nhân ma trận có tính chất kết hợp:$(A.B).C = A.(B.C)$.
Ma trận vuông$A = \left(a_{ij}\right)_n$ được gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận vuông $B = \left(b_{ij}\right)_n$ sao cho $A.B = B.A = I_n$.
Ma trận vuông A gọi là ma trận trực giao nếu $A.A^t = I_n$.
Nhận xét : Ta thấy tập hợp các ma trận vuông cấp n cùng với phép cộng và nhân ma trận lập thành một vành không giao hoán với phần tử không là ma trận O và phần tử đơn vị là ma trận đơn vị I_n. Hơn nữa nếu thêm vào phép nhân vô hướng, nó tạo thành một đại số trên trường K. Kí hiệu tập các ma trận vuông cấp n là $Mat(n, K)$, ở đây K là trường R hoặc C.

1.2. Định thức của ma trận vuông

1.2.1. Các định nghĩa và tính chất

Định thức của ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_n$ là một số kí hiệu là $det(A)$ hoặc $|A|$ được xác định như sau:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1 \dots} a_{\sigma(n)n.}$$

Từ định nghĩa ta có một số tính chất và kết quả sau:
a) Nếu một cột(một hàng) của định thức có nhân tử chung thì ta đưa được nhân tử chung ra ngoài.
Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & pa_{1i}+qb_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & pa_{2i}+qb_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & pa_{mi}+qb_{mi} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & b_{mi} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

b) Đổi chỗ hai cột của định thức thì định thức không đổi dấu.

c) Định thức có một cột bằng 0, định thức có hai cột bằng nhau, định thức có một cột là tổ hợp tuyến tính của các cột còn lại thì bằng 0.

d) Nếu cộng thêm vào một cột một tổ hợp tuyến tính của các cột còn lại thì định thức không thay đổi.

e) $\det(I_n) = 1$.

f) $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.

g) Ma trận A khả nghịch (không suy biến) khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$.

h) $\det(A) = \det(A^t)$.

1.2.2. Định lý 1(Laplace)

Cho $A = (a_{ij})_n$ với các số nguyên $1 \leqslant q < n$, $1 \leqslant i_1 < ... < i_q \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < ... < j_q \leqslant n$. Gọi $\Delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}(A)$ là định thức của ma trận cấp q tạo bởi các phần tử ở giao các dòng $i_1, ..., i_q$, với các cột $j_1, ..., j_q$.Còn $\widetilde{\Delta}_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}(A)$ là định thức của ma trận còn lại từ A sau khi xóa đi các dòng $i_1, ..., i_q$, và các cột $j_1, ..., j_q$ nhân với $(-1)^{i_1+...+i_q+j_1+...+j_q}$ và được gọi là định thức con bù của $\Delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}(A)$. Ta gọi ($\widetilde{\Delta}_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}(A)$ là phần bù đại số của $\Delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}(A)$). Giả sử đã chọn ra q dòng (tương ứng, q cột) trong một định thức cấp $n(1 \leqslant q < n)$. Khi đó, định thức đã cho bằng tổng tất cả các định thức con cấp q lấy ra từ q dòng (tương ứng, q cột) đã chọn với phần bù đại số của chúng. Nói cách khác ta có :

(i) Công thức khai triển định thức của ma trận A theo q dòng $i_1, ..., i_q$:

$$\det A = \sum_{1 \leqslant j_1 < ... < j_q \leqslant n} (-1)^{i_1+...+i_q+j_1+...+j_q} \Delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}(A).\widetilde{\Delta}_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}(A).$$

(ii) Công thức khai triển định thức của ma trận A theo q cột $j_1, ..., j_q$:

$$\det A = \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_q \leqslant n} (-1)^{i_1+...+i_q+j_1+...+j_q} \Delta_{i_1...i_q}^{j_1...j_q}(A). \widetilde{\Delta}_{i_1...i_q}^{j_1...j_q}(A).$$

Đặc biệt : $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \widetilde{a_{ij}}$ *(ở đây* $\widetilde{a_{ij}}$ *là phần bù đại số của* a_{ij} *). Ta nói đây là công thức khai triển 1 định thức theo 1 dòng (hoặc 1 cột) nào đó .*

1.2.3. Đa thức đặc trưng, giá trị riêng và véc tơ riêng

Định nghĩa 2. *Đa thức* $P_\lambda(A) = \det(A - \lambda I_n)$ *được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận A. Hiển nhiên* $P_\lambda(A)$ *là đa thức biến* λ *bậc n và ta có:*

$$P_\lambda(A) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} b_1 \lambda^{n-1} + ... + b_{n-1}(-\lambda) + b_n.$$

trong đó b_k *là tổng của định thức con chính cấp k của ma trận A,*$\forall k = \overline{1, n}$.

Định nghĩa 3. *Nghiệm của phương trình* $P_\lambda(A) = 0$ *được gọi là giá trị riêng của ma trận A.*

Định nghĩa 4. *Véc tơ* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ *thuộc* K^n *được gọi là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng* λ *của ma trận A nếu* $A[x] = \lambda[x]$ *với* $[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$.

1.3. Ma trận đối xứng và dạng toàn phương

1.3.1. Ma trận đối xứng và các tính chất

Tính chất 1. *Mọi nghiệm của phương trình đặc trưng của ma trận đối xứng A trên trường số thực đều là thực .*