ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ KIM LIÊN

ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC
Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Thái Nguyên, năm 2012

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Sau quá trình nhận đề tài và nghiên cứu dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS Lê Thị Thanh Nhàn, luận văn "Định lí cơ bản của Đại số" của tôi đã được hoàn thành. Có được kết quả này, đó là nhờ sự dạy bảo hết sức tận tình và nghiêm khắc của Cô. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Cô và gia đình!

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo-Khoa học-Quan hệ quốc tế và Khoa Toán-Tin của Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi nhất trong suốt quá trình học tập tại trường cũng như thời gian tôi hoàn thành đề tài này. Sự giúp đỡ nhiệt tình và thái độ thân thiện của các cán bộ thuộc Phòng Đào tạo và Khoa Toán-Tin đã để lại trong lòng mỗi chúng tôi những ấn tượng hết sức tốt đẹp.

Tôi xin cảm ơn Phòng Giáo dục và Đào tạo huyện Thủy Nguyên - thành phố Hải Phòng và Trường trung học cơ sở Dương Quan - nơi tôi đang công tác đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học này.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học Toán K4B (Khóa 2010-2012) đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên cổ vũ để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

LỜI NÓI ĐẦU

Định lí cơ bản của Đại số phát biểu rằng mỗi đa thức một biến khác hằng với hệ số phức có ít nhất một nghiệm phức. Đôi khi, Định lí cơ bản của Đại số được phát biểu dưới dạng: Mỗi đa thức một biến khác 0 với hệ số phức có số nghiệm phức (mỗi nghiệm tính với số bội của nó) đúng bằng bậc của đa thức đó.

Mặc dù tên của định lí là "Định lí cơ bản của Đại số" nhưng không có một chứng minh thuần túy đại số nào cho định lí này. Tất cả các chứng minh cho Định lí đều cần đến tính đầy đủ của tập các số thực, hoặc một dạng tương đương về tính đầy đủ, mà tính đầy đủ lại không là khái niệm đại số. Hơn nữa, Định lí cơ bản của Đại số không phải là nền tảng của Đại số hiện đại. Tên của định lí này được đặt ra vào thời điểm khi mà việc nghiên cứu đại số chủ yếu là để giải phương trình đa thức.

Peter Roth là người đầu tiên phát biểu gợi mở "Định lí cơ bản của Đại số" trong cuốn sách "Arithmetica Phylosophica" công bố năm 1608: "*Một đa thức bậc n với hệ số thực có không quá n nghiệm*". Tiếp đến là khẳng định của Albert Giard (1595-1632) trong cuốn sách "L'invention nouvelle en l'Algèbre" xuất bản năm 1629: "*Phương trình đa thức bậc n có n nghiệm, trừ khi phương trình bị khuyết*". Nhiều nhà toán học đã tin Định lí là đúng, và do đó họ tin rằng mọi đa thức với hệ số thực khác hằng đều viết dưới dạng tích của các đa thức với hệ số thực bậc một hoặc hai. Bên cạnh đó lại có những người (Gottfried Wilhelm Leibniz, Nikolaus II Bernoulli) cố tìm ra những đa thức bậc 4 với hệ số thực không là tích của các đa thức bậc 1 hoặc 2. Tuy nhiên, các phản ví dụ của họ đều được Leonhard Euler phản bác, điều này càng làm cho các nhà toán học thời đó tin tưởng tính đúng đắn của Định lí.

Chứng minh đầu tiên cho Định lí thuộc về D'Alembert vào năm 1746, nhưng chứng minh này không hoàn chỉnh. Euler 1749 có một chứng minh đúng cho Định lí trong trường hợp bậc của đa thức $\leqslant 6$. Các chứng minh khác được thực hiện bởi Euler 1749, De Foncenex 1759, Lagrange 1772 và Laplace 1795 đều có ít nhiều chỗ chưa chặt chẽ. Kể cả chứng minh đầu tiên của Gauss năm 1799 cũng không đầy đủ. Mãi đến năm 1816, Gauss mới đưa ra một chứng minh chính xác cho Định lí.

Mục tiêu của luận văn là giới thiệu lịch sử Định lí cơ bản của Đại số, trong đó nhấn mạnh những đóng góp quan trọng của D'Alembert, Euler và Gauss, đồng thời trình bày một số chứng minh sau này cho Định lí bằng cách sử dụng các công cụ đại số, giải tích phức và tôpô.

Các kết quả và thông tin trong luận văn được viết dựa vào bài báo [Ba] của Baltus trên "Historia Mathematica" 2004, bài báo [Ca] của J. Carrera trên "Publicions Matematiques" 1992, cuốn sách [MF] của Miller-File 2003, và đặc biệt là bài báo [Du] của Dunham 1991. Dunham đã được Hội Toán học Mỹ trao giải thưởng Polya năm 1992 vì bài báo này.

Luận văn gồm 3 chương. Chương 1 trình bày kiến thức chuẩn bị về đa thức. Chương 2 giới thiệu lịch sử Định lí cơ bản của Đại số với những đóng góp tiêu biểu của một số nhà toán học. Chương 3 đưa ra một số chứng minh cho Định lí bằng cách sử dụng các công cụ Đại số, Giải tích phức và Tôpô. Ngoài ra, luận văn còn có Phần phụ lục trình bày kiến thức về số phức, mở rộng trường, trường phân rã cũng như hình ảnh của một số nhà toán học có đóng góp quan trọng cho Định lí.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Mục đích của chương này là nhắc lại một số khái niệm và kết quả liên quan đến đa thức trên một trường như phép chia với dư, nghiệm của đa thức để phục vụ việc trình bày các kết quả của các chương sau.

1.1 Đa thức trên một trường

1.1.1. Định nghĩa. Một tập K cùng với hai phép toán cộng và nhân được gọi là *trường* nếu:

(a) Kết hợp: $a+(b+c) = (a+b)+c$ và $(ab)c = a(bc)$ với mọi $a, b, c \in K$.

(b) Giao hoán: $a + b = b + a$ và $ab = ba$ với mọi $a, b \in K$.

(c) Phân phối: $a(b + c) = ab + ac$ với mọi $a, b, c \in K$.

(d) Tồn tại *đơn vị* $1 \in K$ sao cho $a1 = 1a = a$ với mọi $a \in K$.

(e) Tồn tại phần tử $0 \in K$ sao cho $a + 0 = 0 + a = a$ với mọi $a \in K$.

(g) Mỗi $a \in K$, tồn tại phần tử đối $-a \in K$ sao cho $a + (-a) = 0$.

(h) Mỗi $0 \neq a \in K$, tồn tại *phần tử khả nghịch* $a^{-1} \in K$ sao cho $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$.

Chẳng hạn, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ là các trường. Tập $\mathbb{Q}[\sqrt{7}] = \{a+b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ là một trường. $\mathbb{Q}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ là một trường nếu p là số nguyên tố.

Từ nay cho đến hết chương này, luôn giả thiết K là một trường.

1.1.2. Định nghĩa. Một biểu thức dạng $f(x) = a_nx^n + \ldots + a_0$ trong đó $a_i \in K$ với mọi i được gọi là một *đa thức* của ẩn x (hay biến x) với hệ số trong K. Nếu $a_n \neq 0$ thì a_n được gọi là *hệ số cao nhất* của $f(x)$ và số tự nhiên n được gọi là *bậc* của $f(x)$, kí hiệu là $\deg f(x)$.

Chú ý rằng hai đa thức $f(x) = \sum a_ix^i$ và $g(x) = \sum b_ix^i$ là bằng nhau nếu và chỉ nếu $a_i = b_i$ với mọi i. Ta chỉ định nghĩa bậc cho những đa thức khác 0, còn ta quy ước đa thức 0 là không có bậc. Kí hiệu $K[x]$ là tập các đa thức ẩn x với hệ số trong K. Với $f(x) = \sum a_ix^i$ và $g(x) = \sum b_ix^i$, định nghĩa $f(x) + g(x) = \sum(a_ib_i)x^i$ và $f(x)g(x) = \sum c_kx^k$, trong đó $c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j$.

Ta dễ dàng kiểm tra được tính chất sau đối với bậc của các đa thức.

1.1.3. Bổ đề. *Với* $f(x), g(x) \in K[x]$ *ta luôn có*

$$\deg(f(x) + g(x)) \leqslant \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$$
$$\deg(f(x).g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

Định lí sau đây, gọi là Định lí phép chia với dư, đóng một vai trò rất quan trọng trong lí thuyết đa thức.

1.1.4. Định lý. *Cho* $f(x), g(x) \in K[x]$, *trong đó* $g(x) \neq 0$. *Khi đó tồn tại duy nhất một cặp đa thức* $q(x), r(x) \in K[x]$ *sao cho*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \text{ với } r(x) = 0 \text{ hoặc } \deg r(x) < \deg g(x).$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh tính duy nhất. Giả sử

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x),$$

trong đó $r(x), r_1(x)$ bằng 0 hoặc có bậc nhỏ hơn bậc của $g(x)$. Khi đó

$$g(x)(q(x) - q_1(x)) = r_1(x) - r(x).$$

Nếu $r(x) \neq r_1(x)$ thì

$$\deg(r - r_1) = \deg\big(g(q - q_1)\big) = \deg g + \deg(q - q_1).$$

Điều này mâu thuẫn vì

$$\deg(r - r_1) \leqslant \max\{\deg r, \deg r_1\} < \deg g \leqslant \deg g + \deg(q - q_1).$$

Do vậy, $r_1(x) = r(x)$. Suy ra $g(x)(q(x) - q_1(x)) = 0$. Vì $g(x) \neq 0$ nên $q(x) - q_1(x) = 0$, tức là $q(x) = q_1(x)$.

Bây giờ ta chứng minh sự tồn tại. Nếu $\deg f(x) < \deg g(x)$ thì ta chọn $q(x) = 0$ và $r(x) = f(x)$. Giả sử $\deg f(x) \geq \deg g(x)$. Viết $f(x) = a_m x^m + \ldots + a_0$ và $g(x) = b_n x^n + \ldots + b_0$ với $a_m, b_n \neq 0$ và $n \leqslant m$. Chọn $h(x) = \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n}$. Đặt $f_1(x) = f(x) - g(x)h(x)$. Khi đó $f_1(x) = 0$ hoặc $f_1(x)$ có bậc thực sự bé hơn bậc của $f(x)$. Trong trường hợp $f_1(x) = 0$, ta tìm được dư của phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ là $r(x) = 0$ và thương là $q(x) = h(x)$. Nếu $f_1(x) \neq 0$ thì ta tiếp tục làm tương tự với $f_1(x)$ và ta được đa thức $f_2(x)$. Cứ tiếp tục quá trình trên ta được dãy đa thức $f_1(x), f_2(x), \ldots$, nếu chúng đều khác 0 thì chúng có bậc giảm dần. Vì thế sau hữu hạn bước ta được một đa thức có bậc bé hơn bậc của $g(x)$ và đó chính là đa thức dư $r(x)$. Nếu một đa thức của dãy bằng 0 thì dư $r(x) = 0$. Thế vào rồi nhóm lại ta tìm được $q(x)$. $\square$

Trong định lý trên, $q(x)$ được gọi là *thương* và $r(x)$ được gọi là *dư* của phép chia $f(x)$ cho $g(x)$. Nếu dư của phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ là 0 thì tồn tại $q(x) \in K[x]$ sao cho $f(x) = g(x)q(x)$. Trong trường hợp này ta nói rằng $f(x)$ *chia hết cho* $g(x)$ hay $g(x)$ là *ước* của $f(x)$.

1.2 Nghiệm của đa thức

1.2.1. Định nghĩa. Với mỗi $f(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 \in K[x]$ và α là phần tử trong một trường chứa K, ta đặt $f(\alpha) = a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + a_0$. Nếu $f(\alpha) = 0$ thì ta nói α là *nghiệm* của $f(x)$.

Chẳng hạn, số $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ là nghiệm của đa thức $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

1.2.2. Hệ quả. *Phần tử $a \in K$ là nghiệm của đa thức $f(x) \in K[x]$ nếu và chỉ nếu tồn tại đa thức $g(x) \in K[x]$ sao cho $f(x) = (x-a)g(x)$.*

Chứng minh. Chia $f(x)$ cho $x - a$, dư hoặc bằng 0 hoặc là một đa thức bậc 0 vì bậc của $(x-a)$ bằng 1. Vì vậy, dư là một phần tử $r \in K$. Ta có $f(x) = (x-a)q(x)+r$. Thay $x = a$ vào đẳng thức ta được $r = f(a)$. $\square$

Cho $k > 0$ là một số nguyên. Một phần tử $a \in K$ được gọi là một *nghiệm bội k* của đa thức $f(x) \in K[x]$ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x-a)^k$ nhưng không chia hết cho $(x-a)^{k+1}$. Nếu $k = 1$ thì a được gọi là *nghiệm đơn*. Nếu $k = 2$ thì a được gọi là *nghiệm kép*.

1.2.3. Hệ quả. *Phần tử $a \in K$ là nghiệm bội k của $f(x) \in K[x]$ nếu và chỉ nếu $f(x) = (x-a)^k g(x)$ với $g(x) \in K[x]$ và $g(a) \neq 0$.*

Chứng minh. Giả sử a là nghiệm bội k của $f(x)$. Vì $f(x)$ chia hết cho $(x-a)^k$ nên $f(x) = (x-a)^k g(x)$ với $g(x) \in K[x]$. Nếu $g(a) = 0$ thì theo Hệ quả 1.2.2 ta có $g(x) = (x-a)h(x)$ với $h(x) \in K[x]$ và do đó $f(x)$ chia hết cho $(x-a)^{k+1}$, vô lí. Vậy $g(a) \neq 0$. Ngược lại, vì $f(x) = (x-a)^k g(x)$ nên $f(x)$ chia hết cho $(x-a)^k$. Nếu $f(x)$ chia hết cho $(x-a)^{k+1}$ thì $f(x) = (x-a)^{k+1}h(x)$ với $h(x) \in K[x]$. Do đó

$$(x-a)^k g(x) = (x-a)^{k+1}h(x).$$

Do K là trường nên $g(x) = (x-a)h(x)$. Suy ra $g(a) = 0$, mâu thuẫn. Vậy $f(x)$ không chia hết cho $(x-a)^{k+1}$. $\square$

1.2.4. Hệ quả. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_r \in K$ là những nghiệm phân biệt của $f(x) \in K[x]$. Giả sử a_i là nghiệm bội k_i của $f(x)$ với $i = 1, 2, \ldots, r$. Khi đó $f(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_r)^{k_r} u(x)$, trong đó $u(x) \in K[x]$ và $u(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r$.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo r. Trường hợp $r = 1$ được suy ra từ Hệ quả 1.2.3. Cho $r > 1$. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại $h(x) \in K[x]$ sao cho $f(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_{r-1})^{k_{r-1}} h(x)$, trong đó $h(x) \in K[x]$ và $h(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r - 1$. Vì a_r là nghiệm của $f(x)$ nên ta có

$$0 = f(a_r) = (a_r - a_1)^{k_1}(a_r - a_2)^{k_2} \ldots (a_r - a_{r-1})^{k_{r-1}} h(a_r).$$

Do $a_r \neq a_i$ với mọi $i = 1, \ldots, r - 1$ nên $h(a_r) = 0$. Giả sử $h(x) = (x - a_r)^t u(x)$ trong đó $u(x) \in K[x]$, $u(a_r) \neq 0$ và $t > 0$ là một số nguyên. Vì $h(a_i) \neq 0$ nên $u(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r - 1$. Do a_r là nghiệm bội k_r của $f(x)$ nên $t \leqslant k_r$. Hơn nữa, $f(x)$ có sự phân tích $f(x) = (x - a_r)^{k_r} v(x)$, trong đó $v(x) \in K[x]$ và $v(a_r) \neq 0$. Vì thế ta có

$$f(x) = (x - a_r)^{k_r} v(x) = (x - a_1)^{k_1} \ldots (x - a_{r-1})^{k_{r-1}} (x - a_r)^t u(x).$$

Chú ý rằng K là trường, vì thế giản ước cả hai vế cho $(x - a_r)^t$ ta được

$$(x - a_r)^{k_r - t} v(x) = (x - a_1)^{k_1} \ldots (x - a_{r-1})^{k_{r-1}} u(x).$$

Nếu $t < k_r$ thì khi thay $x = a_r$ vào đẳng thức trên ta có vế trái bằng 0, còn vế phải khác 0, điều này là vô lý. Vậy $t = k_r$. Vì thế f có phân tích

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \ldots (x - a_{r-1})^{k_{r-1}} (x - a_r)^{k_r} u(x)$$

trong đó $u(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r$. □

1.2.5. Hệ quả. *Cho $0 \neq f(x) \in K[x]$ là đa thức. Khi đó số nghiệm của $f(x)$, mỗi nghiệm tính với số bội của nó, không vượt quá bậc của $f(x)$.*