ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH NGỌC QUANG

PHƯƠNG PHÁP DỒN VÀ GIẢM BIẾN TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : **60 46 40**

Giáo viên hướng dẫn:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN, 2012

Mục lục

Mở đầu

Bất đẳng thức là một vấn đề khá cổ điển của toán học sơ cấp và đang ngày càng phát triển, đây cũng là một trong những phần toán học sơ cấp đẹp và thú vị nhất, vì thế luôn cuốn hút rất nhiều người quan tâm. Bất đẳng thức luôn giữ vị trí quan trọng trong các kì thi học sinh giỏi, thi đại học, Olympic quốc gia và quốc tế. Điểm đặc biệt và ấn tượng nhất của bất đẳng thức trong toán học sơ cấp đó là có rất nhiều bài toán khó, thậm chí là rất khó nhưng luôn có thể giải được bằng những kiến thức cơ sở, chủ yếu sử dụng các phép biến đổi, đánh giá sơ cấp để thu được kết quả.

Ngày nay, có rất nhiều các phương pháp chứng minh bất đẳng thức thông dụng như: phương pháp sử dụng các bất đẳng thức cổ điển, phương pháp tam thức bậc hai, phương pháp dùng đạo hàm, phương pháp phân tích bình phương S.O.S., phương pháp véc tơ, phương pháp tọa độ,... Trong những năm gần đây, GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu [1] đã giới thiệu phương pháp tam thức bậc hai định hướng. Đây là cơ sở để có phương pháp giảm biến. Phương pháp giảm biến có thể phát biểu bằng lời như sau: Phương pháp này dựa vào lát cắt và phép biến đổi đồng dạng để giảm số biến. Thông thường, phương pháp này hiệu quả trong trường hợp ba biến chuyển về biểu thức dạng hai biến. Cũng trong khoảng thời gian này, TS. Trần Nam Dũng và Gabriel Dospinescu [3] đã giới thiệu và trình bày phương pháp dồn biến (Mixing variables). Đây là phương pháp rất quan trọng và hiệu quả trong việc chứng minh các bất đẳng thức phức tạp. Phương pháp dồn biến có thể phát biểu một cách đơn giản như sau: Để chứng minh bất đẳng thức $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ chúng ta đi chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_3, \ldots, x_n\right).$$

Sau đó chúng ta đi chứng minh bất đẳng thức

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, \ldots, x_n\right) \geq 0.$$

Bất đẳng thức sau chỉ còn $n-1$ biến và đơn giản hơn bất đẳng thức ban đầu (có n biến).

Mục đích của luận văn này là trình bày lại một cách tổng quan, có hệ thống các kiến thức cơ sở về một số bất đẳng thức cơ bản liên quan đến giá trị trung bình, bất đẳng thức Cauchy liên quan đến tam thức bậc hai và xét đến phương pháp giảm biến, bất đẳng thức Karamata, độ gần đều của bộ số và xét định lý dồn biến tổng quát như là hệ quả của chúng. Tiếp theo xét một số ứng dụng của phương pháp dồn biến trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi và kì thi Olympic.

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 3 chương.

Chương 1, trình bày một số bất đẳng thức cơ bản liên quan đến giá trị trung bình và bất đẳng thức Cauchy liên quan đến tam thức bậc hai. Các kiến thức này là cơ sở để trình bày các nội dung quan trọng ở cuối chương 1 và trong chương 2.

Chương 2, trình bày về độ gần đều, một số khái niệm và tính chất quan trọng của hàm lồi, lõm, từ đó đi đến trình bày phương pháp dồn biến tổng quát. Phương pháp dồn biến về cơ bản là cách thức làm giảm biến trong bất đẳng thức đại số.

Chương 3, trình bày một số áp dụng của phương pháp dồn biến và giảm biến giải các bài toán bất đẳng thức 3 biến, 4 biến.

Qua đây, chúng tôi xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của chúng tôi, GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu, người đã đưa ra đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của chúng tôi. Đồng thời chúng tôi cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán - Tin học trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện về tài liệu và thủ tục hành chính để chúng tôi hoàn thành

luận văn này. Chúng tôi cũng gửi lời cảm ơn đến bạn bè, đặc biệt là các bạn học viên trong lớp Cao học Toán K4, đã động viên giúp đỡ chúng tôi trong quá trình học tập và làm luận văn.

Do thời gian hạn hẹp và khối lượng kiến thức lớn, chắc chắn luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, năm 2012
Học viên

Đinh Ngọc Quang

Chương 1

Một số dạng bất đẳng thức cổ điển và phương pháp giảm biến

Trong chương này chúng tôi trình bày một số bất đẳng thức cơ bản liên quan đến giá trị trung bình và bất đẳng thức Cauchy liên quan đến tam thức bậc hai để phục vụ cho việc trình bày các nội dung chính của luận văn trong các phần sau.

Các vấn đề được trình bày trong chương này được tham khảo và trích dẫn chủ yếu tại một số tài liệu [1], [3].

1.1 Các bất đẳng thức hai biến liên quan đến giá trị trung bình

Xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản $x^2 \geq 0,\ \forall x$. Khi đó

$$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy,\ \forall x, y.$$

Suy ra

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},\ \forall x, y \geq 0. \tag{1.1}$$

Bất đẳng thức (1.1) là một bất đẳng thức quen thuộc ở chương trình toán phổ thông. Ta gọi là bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (gọi ngắn gọn là bất đẳng thức AM-GM[1]) với 2 biến x, y.

[1]Arithmetic Mean - Trung bình cộng, Geometric Mean - Trung bình nhân.

Định lý 1.1 (Bất đẳng thức AM-GM với 2 biến)**.** Với x_1, x_2 không âm, ta có

$$\sqrt{x_1x_2} \le \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{1.2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$.

Chứng minh. Với x_1, x_2 không âm, bình phương 2 vế bất đẳng thức (1.2) được

$$4x_1x_2 \le (x_1 + x_2)^2 \Leftrightarrow 4x_1x_2 \le x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \Leftrightarrow 0 \le (x_1 - x_2)^2$$

đúng với mọi x_1, x_2.

Từ bất đẳng thức (1.1) ta thực hiện một vài biến đổi

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \frac{2xy}{x+y} \le \sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} \le \sqrt{xy}, \ \ \forall x, y \ge 0. \tag{1.3}$$

Bất đẳng thức (1.3) là một Hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức AM-GM với 2 biến, và được gọi là bất đẳng thức giữa trung bình nhân và trung bình điều hòa (gọi ngắn gọn là bất đẳng thức GM-HM[2]) với 2 biến x, y không âm.

Hệ quả 1.1 (Bất đẳng thức GM-HM với 2 biến)**.** Cho x_1, x_2 là các số thực không âm, ta có

$$\frac{2}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}} \le \sqrt{x_1x_2}. \tag{1.4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$.

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức (1.2) đối với $x := \dfrac{1}{x}, y := \dfrac{1}{y}$, ta có

$$\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}} \le \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2},$$

[2]Harmonic - Trung bình điều hòa.

hay

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}.$$

Ta được điều cần chứng minh.

Từ bất đẳng thức (1.1), bình phương 2 vế ta được

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4},$$

hay

$$2xy \leq x^2+y^2 \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2-x^2-y^2}{2} \leq \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \leq \frac{x^2+y^2}{2},$$

lấy căn bậc hai 2 vế ta được

$$\frac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} \leq \sqrt{xy},\ \ \forall x,y \geq 0. \tag{1.5}$$

Bất đẳng thức (1.3) là một Hệ quả của bất đẳng thức AM-GM với 2 biến, và được gọi là bất đẳng thức giữa trung cộng và trung bình bậc hai (gọi ngắn gọn là bất đẳng thức AM-QM[3]) với 2 biến x, y không âm.

Hệ quả 1.2 (Bất đẳng thức AM-QM với 2 biến)**.** Cho x, y là các số thực không âm, ta có

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}. \tag{1.6}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Chứng minh. Với x, y không âm, bình phương 2 vế bất đẳng thức (1.6) ta được

$$\frac{(x+y)^2}{4} \leq \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^2-2xy+y^2}{4} \Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2$$

đúng với mọi x, y.

[3]Quadratic mean - Trung bình bậc hai (toàn phương).

Từ những chứng minh trên chúng ta rút ra được chuỗi bất đẳng thức với 2 biến x, y không âm như sau

$$\min\{x,y\} \leq \frac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \max\{x,y\}. \tag{1.7}$$

1.2 Các bất đẳng thức n biến liên quan đến giá trị trung bình

Định lý 1.2 (Bất đẳng thức AM-GM (Theo [3])). Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực không âm, $n \geq 1$, khi đó

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}. \tag{1.8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Chứng minh. (Phương pháp chứng minh quy nạp Cauchy)[4]
Với $n = 1$, bất đẳng thức (1.8) hiển nhiên đúng.
Với $n = 2$, ta được bất đẳng thức (1.2) đã chứng minh là đúng ở Định lý 1.1.
• Giả thiết quy nạp: Giả sử bất đẳng thức (1.8) đúng với n số thực không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n, n \geq 1$.
• Cho $2n$ số thực không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$, ta xét

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n}}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)$$

$$\geq \frac{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\ldots x_{2n}}}{2} \geq \left(\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\ldots x_{2n}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

hay

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1x_2\ldots x_{2n}}. \tag{1.9}$$

Từ trường hợp $n = 1$, $n = 2$ và (1.9) suy ra (1.8) đúng với $n = 2^k$, $\forall k \geq 1$. Đây chính là quy nạp theo hướng lên trên.

[4]Đây là kiểu quy nạp theo cặp hướng (lên-xuống) do Cauchy đề xuất năm 1821 (Cauchy A.L., cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, I^{re} partie, Analyse alge'brique, Paris, Debure, 1821) để chứng minh Định lý AM-GM [3].