Đặng Tuấn Hiệp

Giải tích p-adic

Đại học sư phạm Huế
2007

Giải tích p-adic

Đặng Tuấn Hiệp

Tháng 10 năm 2007

MỤC LỤC

Chương 1

Chuẩn trên trường

1.1 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1.1. *Cho F là một trường, ánh xạ $|.| : F \to \mathbb{R}$ được gọi là chuẩn trên F nếu nó thỏa mãn ba tính chất sau:*

i. $|x| \geq 0; \quad \forall x \in F$ *và* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. $|xy| = |x||y|; \quad \forall x, y \in F$

iii. $|x + y| \leq |x| + |y|; \quad \forall x, y \in F$

Ví dụ.

1. Lấy $F = \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}$; với giá trị tuyệt đối thông thường là chuẩn.
2. Lấy F là trường tùy ý, $\forall x \in F$, ta định nghĩa

$$|x| = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

là chuẩn tầm thường.

□

Tính chất.

1. $|1| = 1$
2. $|x^{-1}| = \frac{1}{|x|}; \quad \forall x \neq 0$
3. Nếu F là trường hữu hạn thì trên F có duy nhất một chuẩn là chuẩn tầm thường.

□

1.1.1 Chuẩn tương đương

Cho F là trường; $|.|$ là chuẩn trên F. Khi đó, chuẩn $|.|$ cảm sinh ra mêtric $d(x, y) = |x - y|$. Tôpô sinh bởi mêtric này được gọi là tôpô cảm sinh bởi chuẩn $|.|$.

Định nghĩa 1.1.2. *Cho hai chuẩn $|.|_1$, $|.|_2$ trên trường F. Ta nói $|.|_1$ và $|.|_2$ là tương đương với nhau khi và chỉ khi tôpô cảm sinh bởi hai chuẩn này là trùng nhau.*

Ký hiệu $|.|_1 \sim |.|_2$

Định lý 1.1.1 (Các điều kiện tương đương của chuẩn). *Cho F là trường; với $|.|_1$, $|.|_2$ là hai chuẩn trên F, các khẳng định sau tương đương*

1. $|x|_1 < 1 \Leftrightarrow |x|_2 < 1; \quad \forall x \in F.$
2. $|x|_1 \leq 1 \Leftrightarrow |x|_2 \leq 1; \quad \forall x \in F.$
3. *Tồn tại $c > 0$ sao cho* $|x|_1 = |x|_2^c; \quad \forall x \in F$
4. *Dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy đối với chuẩn $|.|_1 \Leftrightarrow$ dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy đối với chuẩn $|.|_2$.*
5. $|.|_1 \sim |.|_2$

Chứng minh.

1. $\Rightarrow$ 2. Với mọi $x \in F,\ x \neq 0$; ta có $|x|_1 > 1 \Leftrightarrow |1/x|_1 < 1 \Leftrightarrow |1/x|_2 < 1 \Leftrightarrow |x|_2 > 1$. Do đó $|x|_1 \leq 1 \Leftrightarrow |x|_2 \leq 1;\ \forall x \in F,\ x \neq 0$, với $x = 0$ hiển nhiên.

2. $\Rightarrow$ 1. Với $x = 0$ hiển nhiên.
Với mọi $x \in F,\ x \neq 0$; ta có $|x|_1 \geq 1 \Leftrightarrow |1/x|_1 \leq 1 \Leftrightarrow |1/x|_2 \leq 1 \Leftrightarrow |x|_2 \geq 1$. Do đó $|x|_1 < 1 \Leftrightarrow |x|_2 < 1;\ \forall x \in F,\ x \neq 0$

1. $\Rightarrow$ 3.
- Nếu chuẩn $|.|_1$ là chuẩn tầm thường thì chuẩn $|.|_2$ cũng là chuẩn tầm thường.
Thật vậy, với mọi $x \in F,\ x \neq 0$ ta có $|x|_1 = 1$.
Nếu $|x|_2 > 1$ thì $|1/x|_2 < 1 \Rightarrow |1/x|_1 < 1$ (mâu thuẫn)
Nếu $|x|_2 < 1$ thì $|x|_1 < 1$ (mâu thuẫn)
Do đó $|x|_2 = 1$ hay $|.|_2$ là chuẩn tầm thường. Vậy $|.|_1 \equiv |.|_2$
- Nếu $|.|_1$ không là chuẩn tầm thường thì tồn tại $x_0 \in F$ sao cho $|x_0|_1 > 1$, do đó $|x_0|_2 > 1$. Đặt $a = |x_0|_1$ và $b = |x_0|_2$. Khi đó, $\forall x \in F,\ x \neq 0$ ta viết $|x|_1 = a^y,\ y = \log_a |x|_1$. Ta sẽ chứng minh $|x|_2 = b^y$. Thật vậy, lấy $\frac{m}{n} > y$ ta có

$$|x|_1 = a^y < a^{\frac{m}{n}} = |x_0|_1^{\frac{m}{n}} \Rightarrow |x^n|_1 < |x_0^m|_1$$

$$\Rightarrow |x^n/x_0^m|_1 < 1 \Rightarrow |x^n/x_0^m|_2 < 1 \Rightarrow |x|_2 < b^{\frac{m}{n}}$$

cho $\frac{m}{n} \to y$ ta được $|x|_2 \leq b^y$.
Tương tự nếu lấy $y > \frac{m}{n}$, thì ta được $|x|_2 \geq b^y$.
Vậy $|x|_2 = b^y$. Do đó

$$|x|_1 = a^y = (b^y)^{\log_b a} = |x|_2^c; \quad \text{với } c = \log_b a > 0$$

Với $x = 0$ hiển nhiên đẳng thức trên cũng thỏa mãn.

3. $\Rightarrow$ 4. Dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy đối với chuẩn $|.|_1$ khi và chỉ khi

$$|x_n - x_m|_1 \to 0 \quad \text{khi } m, n \to \infty$$

$$\Leftrightarrow |x_n - x_m|_1^{1/c} \to 0 \quad \text{khi } m, n \to \infty \text{ với } c > 0$$

$$\Leftrightarrow |x_n - x_m|_2 \to 0 \quad \text{khi } m, n \to \infty$$

$\Leftrightarrow$ Dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy đối với chuẩn $|.|_2$.

4. $\Rightarrow$ 1. Giả sử $|x|_1 < 1$ ta cần chứng minh $|x|_2 < 1$. Từ giả thiết $|x|_1 < 1$ ta suy ra $x^n \to 0$ đối với chuẩn $|.|_1$. Do đó $\{x^n\}$ là dãy Cauchy đối với $|.|_1$ hay $\{x^n\}$ là dãy Cauchy đối với $|.|_2$. Điều này có nghĩa là $(x^{n+1} - x^n) \to 0$ đối với chuẩn $|.|_2$ hay $x^n(x-1) \to 0$ đối với chuẩn $|.|_2$. Do đó $|x^n|_2 |1 - x|_2 \to 0$. Mà $|1 - x|_2 \neq 0$ suy ra $|x^n|_2 \to 0$ hay $|x|_2 < 1$.

3. $\Rightarrow$ 5. Gọi τ_1, τ_2 lần lượt là tôpô được cảm sinh từ chuẩn $|.|_1, |.|_2$. Lấy $A \in \tau_1$, $\forall x \in A$ thì tồn tại $B_1(x, r) \subset A$. Khi đó

$$y \in B_1(x, r) \Leftrightarrow |y - x|_1 < r \Leftrightarrow |y - x|_1^{1/c} < r^{1/c}$$

$$\Leftrightarrow |y - x|_2 < r^{1/c} \Leftrightarrow y \in B_2(x, r^{1/c}) \Leftrightarrow B_1(x, r) = B_2(x, r^{1/c})$$

Điều này có nghĩa là tồn tại $B_2(x, r^{1/c}) \subset A$. Do đó $A \in \tau_2$.
Vậy $\tau_1 \equiv \tau_2$

5. $\Rightarrow$ 1. Giả sử $|x|_1 < 1$ suy ra $|x^n|_1 \to 0$. Do $|.|_1 \sim |.|_2$ nên $|x^n|_2 \to 0$. Suy ra $|x|_2 < 1$

$\square$

1.2 Chuẩn phi Archimedean

Định nghĩa 1.2.1. *Cho F là trường và $|.|$ là chuẩn trên F. Khi đó chuẩn $|.|$ được gọi là chuẩn phi Archimedean nếu nó thỏa mãn thêm điều kiện*

iii'. $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}; \quad \forall x, y \in F$

Ví dụ.

1. Chuẩn tầm thường trên trường F là chuẩn phi Archimedean.

2. Nếu F là trường hữu hạn thì mọi chuẩn trên F đều là chuẩn tầm thường. Do đó, mọi chuẩn trên trường hữu hạn F đều là phi Archimedean.

3. Cho p là số nguyên tố. Khi đó $\forall x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0$ được biểu diễn dưới dạng

$$x = p^a \frac{m}{n}; \quad \text{với } a, m, n \in \mathbb{Z};\ n \neq 0;\ (m,p) = 1,\ (n,p) = 1$$

Ký hiệu $a = ord_p(x)$
Qui ước $ord_p(0) = \infty$

Bổ đề 1.2.1. *Cho p là số nguyên tố. Khi đó $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ ta có*

i. $ord_p(xy) = ord_p(x) + ord_p(y)$

ii. $ord_p(x+y) \geq min\{ord_p(x), ord_p(y)\}$

Lấy $\rho \in (0,1)$. Khi đó chuẩn $|.| : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$|x| = \begin{cases} \rho^{ord_p(x)} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

là chuẩn phi Archimedean trên $\mathbb{Q}$
Lấy $\rho_1, \rho_2 \in (0,1)$ và gọi $|.|_1, |.|_2$ tương ứng là hai chuẩn được xác định theo ρ_1, ρ_2. Khi đó $|.|_1 \sim |.|_2$. Thật vậy $\forall x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0$

$$|x|_1 = \rho_1^{ord_p(x)} = (\rho_2^{ord_p(x)})^{log_{\rho_2}\rho_1} = |x|_2^c; \quad \text{với } c = log_{\rho_2}\rho_1 > 0$$

Lấy $\rho = \frac{1}{p}$, ta có chuẩn $|.|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-ord_p(x)} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

là chuẩn phi Archimedean trên $\mathbb{Q}$. Ta hay gọi là chuẩn p-adic trên $\mathbb{Q}$.

□

Định lý 1.2.1 (Các điều kiện của chuẩn phi Archimedean). *Cho F là trường với e là phần tử đơn vị và $|.|$ là chuẩn trên F. Các điều kiện sau đây là tương đương.*

1. *Chuẩn $|.|$ là chuẩn phi Archimedean.*

2. $|2| \leq 1$, *với* $2 = 2.e = e + e$.

3. $|n| \leq 1$, *với* $n = n.e = \underbrace{e + e + \cdots + e}_{n}$

4. *Tập* $N = \{n = n.e \mid n \in \mathbb{N}\}$ *bị chặn.*

Chứng minh.

1. $\Rightarrow$ 2. Ta có $|2| = |e+e| \le \max\{|e|,|e|\} = 1$

2. $\Rightarrow$ 3. Nếu $n \in N$ thì $n = a_0 + a_1 2 + \cdots + a_s 2^s$.
   Trong đó $a_i \in \{0,1\},\ \forall i = 0,1,\ldots,s;\ a_s = 1$.
   Suy ra $|a_i| \le 1,\ \forall i = 0,1,\ldots,s$. Do đó
   $$|n| = |a_0 + a_1 2 + \cdots + a_s 2^s| \le |a_0| + |a_1||2| + \cdots + |a_s||2^s|$$
   $$\le 1 + 1 + \cdots + 1 = s+1$$
   Mặt khác, ta có
   $$2^s \le n < 2^{s+1}$$
   Suy ra
   $$s+1 \le \log_2 n + 1$$
   Do đó
   $$|n| \le \log_2 n + 1$$
   Khi đó, với mọi số nguyên dương k, ta có
   $$|n^k| \le \log_2 n^k + 1 = k\log_2 n + 1 \le k(\log_2 n + 1)$$
   Suy ra
   $$|n| \le k^{1/k}(\log_2 n + 1)^{1/k}$$
   Cho $k \to \infty$, ta sẽ có $|n| \le 1$

3. $\Rightarrow$ 4. Hiển nhiên.

4. $\Rightarrow$ 1. Giả sử tập N bị chặn, tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $|n| \le a;\ \forall n \in N$. Khi đó
   $$|x+y|^n = |(x+y)^n| = |\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}|$$
   $$\le \sum_{k=0}^{n} |C_n^k||x|^k|y|^{n-k} \le \sum_{k=0}^{n} a|x|^k|y|^{n-k}$$
   $$\le (n+1)a(\max\{|x|,|y|\})^n$$
   Suy ra
   $$|x+y| \le \sqrt[n]{n+1}\,\sqrt[n]{a}\max\{|x|,|y|\}$$
   Cho $n \to \infty$ thì $\sqrt[n]{n+1}\,\sqrt[n]{a} \to 1$. Do đó
   $$|x+y| \le \max\{|x|,|y|\}$$
   Vậy $|.|$ là chuẩn phi Archimedean.

$\square$

1.2.1 Tính chất cơ bản của chuẩn phi Archimedean

Mệnh đề 1.2.1 (Nguyên lý tam giác cân). *Cho $|.|$ là chuẩn phi Archimedean trên trường F. Nếu $|x| \neq |y|$ thì $|x+y| = \max\{|x|, |y|\}$.*

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|x| > |y|$. Khi đó, ta có

$$|x| = |x+y-y| \leq \max\{|x+y|, |y|\} \leq \max\{|x|, |y|\} = |x|$$

Suy ra

$$|x| = \max\{|x+y|, |y|\}$$

Mà $|x| > |y|$ nên $|x| = |x+y|$. Vậy $|x+y| = \max\{|x|, |y|\}$. □

Mệnh đề 1.2.2. *Cho $|.|$ là chuẩn phi Archimedean trên trường F. Nếu dãy $\{x_n\} \to x \neq 0$ thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n| = |x|,\ \forall n \geq n_0$*

Chứng minh. Vì $x \neq 0$ nên $|x| > 0$ và do $\{x_n\} \to x$ nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - x| < |x|;\ \forall n \geq n_0$. theo nguyên lý tam giác cân, ta có $|x_n| = |x_n - x + x| = \max\{|x_n - x|, |x|\} = |x|;\ \forall n \geq n_0$ □

1.3 Chuẩn trên $\mathbb{Q}$

Định lý 1.3.1 (Định lý Ostrowski). *Mọi chuẩn không tầm thường $|.|$ trên $\mathbb{Q}$ đều tương đương với chuẩn giá trị tuyệt đối thông thường hoặc chuẩn $|.|_p$, với p là số nguyên tố nào đó.*

Chứng minh.

1. Nếu $|2| > 1$ thì $|.|$ là chuẩn Archimedean.
   Lấy $n \in \mathbb{N}$, giả sử $n = a_0 + a_1 2 + \cdots + a_s 2^s$, trong đó $a_i \in \{0; 1\}$ và $2^s \leq n < 2^{s+1}$; $|2| = 2^a$, $a = \log_2 |2|$. Ta có

   $$|n| \leq |a_0| + |a_1||2| + \cdots + |a_s||2|^s \leq 1 + 2^a + \cdots + 2^{as} \leq 2^{as}C \leq n^a C$$

   Suy ra

   $$|n^k| \leq n^{ka}C \Rightarrow |n| \leq n^a C^{1/k}$$

   Cho $k \to \infty$ ta được $|n| \leq n^a$
   Mặt khác, do $2^s \leq n < 2^{s+1}$ nên ta có

   $$|2^{s+1}| = |n + 2^{s+1} - n| \leq |n| + |2^{s+1} - n|$$

   Suy ra

   $$|n| \geq |2^{s+1}| - |2^{s+1} - n| \geq 2^{(s+1)a} - (2^{s+1} - n)^a \geq 2^{(s+1)a} - 2^{sa}$$

   Do đó

   $$|n| \geq 2^{(s+1)a}C' \geq n^a C'$$