ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN ĐỨC TOÀN

PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA ẨN HÀM CƠ BẢN

LUẬN VĂN THẠC SĨ

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 40

Giáo viên hướng dẫn:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN, 2012

Mục lục

Mở đầu

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Phương trình hàm là bài toán không thể thiếu khi nghiên cứu về hàm số. Phương trình hàm cũng là một trong các bài toán hay gặp và khó trong các kì thi học sinh giỏi toán quốc gia, khu vực và quốc tế. Đã có nhiều tài liệu viết về phương trình hàm nhưng chưa đủ so với nhu cầu của những người yêu phương trình hàm. Để góp thêm một cách nhìn về một lớp các phương trình hàm đa ẩn hàm, tôi đã chọn đề tài "Phương trình hàm đa ẩn hàm cơ bản".

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu phương trình hàm Cauchy thông qua các ví dụ cụ thể nhằm củng cố các phương pháp và kĩ năng biến đổi trong bài toán giải phương trình hàm.

Góp thêm cách nhìn nhận và phương pháp giải một lớp các phương trình hàm đa ẩn hàm mà trọng tâm là phương trình Pexider và phương trình hàm sinh bởi đẳng thức-phi đẳng thức đại số.

Định hướng cho học sinh cách vận dụng phương trình hàm trong việc giải một số bài toán ở cấp trung học phổ thông và bồi dưỡng học sinh giỏi toán.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Phương trình hàm Cauchy, phương trình hàm Jensen, phương trình hàm D'Alembert, phương trình hàm Pexider, phương trình hàm sinh bởi đẳng thức và phi đẳng thức đại số.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu trực tiếp từ các tài liệu của giáo viên hướng dẫn, tủ sách chuyên toán và các kỷ yếu hội thảo khoa học về chuyên toán cũng như từ bài học kinh nghiệm giảng dạy của các đồng nghiệp và các bạn học viên trong lớp.

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi cấp trung học phổ thông.

6. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 3 chương.

Luận văn được hoàn thành dưới sự định hướng và hướng dẫn tận tình của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc của mình tới Thầy.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, tác giả đã nhận được sự quan tâm giúp đỡ của Khoa Toán Tin, Phòng đào tạo Sau đại học trường ĐHKH-ĐHTN. Tác giả xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ quý báu đó.

Tác giả cũng muốn được gửi lời cảm ơn tới gia đình, các bạn đồng nghiệp lớp Toán K4A trường ĐHKH, các Thầy Cô giáo tổ toán và Ban giám hiệu trường THPT Tiên Du số 1 Bắc Ninh đã giúp đỡ và tạo điều kiện để tác giả hoàn thành luận văn này.

Chương 1

Các phương trình hàm dạng Cauchy

1.1 Các phương pháp cơ bản để giải phương trình hàm

Có rất nhiều phương pháp để giải một phương trình hàm. Dưới đây là một số phương pháp cơ bản hay được sử dụng trong quá trình giải phương trình hàm từ các đề thi Olympic.

* Thay các giá trị cho các biến: Cách thử đầu tiên là thay bởi hằng số (chẳng hạn 0 hoặc 1), sau đó là một số biểu thức mà sẽ làm cho một phần của phương trình trở thành hằng số. Ví dụ, nếu $f(x+y)$ xuất hiện trong phương trình và nếu xác định được $f(0)$ thì ta sẽ có kết luận tương ứng với $y=-x$.

* Quy nạp toán học: Phương pháp này sử dụng $f(1)$ để tìm tất cả các $f(n)$ với $n \in \mathbb{Z}$, sau đó tìm $f(\frac{1}{m})$ và $f(r)$ với $r \in \mathbb{Q}$.

* Xem xét tính chất đơn ánh, toàn ánh và song ánh của hàm số trong phương trình: Trong rất nhiều bài toán tính chất đó là không khó để chứng minh, nhưng có thể là mấu chốt của lời giải bài toán.

* Tìm kiếm các điểm bất động và không điểm của hàm: Phương pháp này thường hay gặp trong các bài toán khó. Số lượng các bài toán sử dụng phương pháp này ít hơn số lượng các bài toán sử dụng ba phương pháp trên. Ngoài ra ta cũng cần nắm vững các đặc trưng của các hàm khi sử dụng phương pháp này.

* Sử dụng phương trình hàm Cauchy và các phương trình hàm kiểu này: Thường thì ta cần sử dụng các biến đổi và một số phương pháp giải khác để đưa phương trình hàm ban đầu về phương trình hàm Cauchy.

* Xem xét tính liên tục và đơn điệu của một hàm số: Tính chất liên tục

thường là điều kiện thêm và cũng như tính đơn điệu, nó thường dùng để đưa bài toán về phương trình hàm Cauchy. Nếu không phải vậy, bài toán sẽ giải quyết theo một cách khó khăn hơn.

* Thiết lập các mối quan hệ truy hồi (lặp lại): Phương pháp này sử dụng các phương trình mà miền giá trị bị chặn và trong trường hợp chúng ta có thể tìm được mối liên hệ giữa $f(f(n)), f(n)$ và n.

* Thay thế hàm số: Phương pháp này dùng để đưa phương trình hàm đã cho trở nên đơn giản hơn. Ta có thể thế ẩn để tạo ra phương trình hàm mới hoặc hệ phương trình hàm mới có lời giải đơn giản hơn.

* Biểu diễn các hàm số thành tổng các hàm chẵn và hàm lẻ. Điều đó có thể hữu ích trong việc tuyến tính hóa phương trình hàm của nhiều hàm số.

* Xử lý số trong hệ cơ số 10. Truy nhiên, phương pháp này chỉ sử dụng nếu miền xác định là tập $\mathbb{N}$.

* Phương pháp hệ số bất định, phương pháp chuyển qua giới hạn, phương pháp sai phân...

Cuối cùng, ta nhấn mạnh điều quan trọng nhất là đoán nhận được lời giải ngay. Điều đó giúp ích rất nhiều trong việc tìm được phép thế hợp lý. Tuy nhiên, cuối lời giải cần kiểm tra lại xem lời giải đã thỏa mãn các điều kiện đã cho chưa.

1.2 Đặc trưng hàm của một số hàm số sơ cấp (xem [6])

Để có thể định hướng, gợi ý và dự đoán công thức nghiệm của các bài toán liên quan, chúng ta xét một vài tính chất tiêu biểu của một số dạng hàm số quen biết (xem [1]).

1. Hàm bậc nhất: $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ có tính chất

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)],\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Hàm tuyến tính: $f(x) = ax$ $(a \neq 0)$ có tính chất

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Hàm mũ: $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ \ a \neq 1)$ có tính chất

$$f(x+y) = f(x)f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

4. Hàm logarit: $f(x) = \log_a |x|$ $(a > 0, a \neq 1)$ có tính chất

$$f(xy) = f(x) + f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

5. Hàm lượng giác
a) Hàm $f(x) = \sin x$ có tính chất

$$f(3x) = 3f(x) - 4[f(x)]^3,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Hàm $f(x) = \cos x$ có tính chất

$$f(2x) = 2[f(x)]^2 - 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

và

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

c) Hàm $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ có tính chất

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

d) Hàm $f(x) = \tan x$ có tính chất

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$$

với $x, y \in \mathbb{R}, x + y \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2},\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$.
e) Hàm $f(x) = \cot x$ có tính chất

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y) - 1}{f(x) + fy)}$$

với $x, y \in \mathbb{R},\ x + y \neq k\pi,\ x \neq k\pi,\ y \neq k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$.

6. Hàm lượng giác ngược
a) Hàm $f(x) = \arcsin x$ có tính chất

$$f(x) + f(y) = f(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}),\ \ \forall x, y \in [-1; 1].$$

b) Hàm $g(x) = \arccos x$ có tính chất

$$g(x) + g(y) = g(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}),\ \ \forall x, y \in [-1; 1].$$

c) Hàm $h(x) = \arctan x$ có tính chất

$$h(x) + h(y) = h\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),\ \ \forall x, y : xy \neq 1.$$

d) Hàm $p(x) = \operatorname{arccot} x$ có tính chất

$$p(x) + p(y) = p\left(\frac{xy-1}{x+y}\right),\ \ \forall x, y : x + y \neq 0.$$

7. Các hàm hyperbolic

a) Hàm $f(x) = \sinh x := \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ có tính chất

$$f(3x) = 3f(x) + 4[f(x)]^3,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Hàm $g(x) = \cosh x := \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ có tính chất

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

c) Hàm $h(x) = \tanh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ có tính chất

$$h(x+y) = \frac{h(x) + h(y)}{1 + h(x)h(y)},\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

d) Hàm $q(x) = \coth x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ có tính chất

$$q(x+y) = \frac{1 + q(x)q(y)}{q(x) + q(y)},\ \ \forall x, y : x, y, x + y \neq 0.$$

1.3 Phương trình hàm Cauchy và các phương trình kiểu Cauchy (xem [6])

1.3.1 Phương trình hàm Cauchy

Phương trình

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

trong lớp hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ được gọi là phương trình hàm Cauchy.

Nếu không đòi hỏi hàm f thoả mãn điều kiện gì thì (1.1) được gọi là điều kiện cộng tính của f.

Nếu tập xác định của (1.1) là $\mathbb{Q}$ thì rất dễ chỉ ra $f(x) = x.f(1)$. Chứng minh này có được nhờ quy nạp toán học.

Tiếp theo, mở rộng miền xác định từ $\mathbb{Q}$ đến $\mathbb{R}$. Không quá khó để chúng ta chỉ ra được lời giải của phương trình hàm Cauchy trong trường hợp này không phải là $f(x) = xf(1)$.

Tuy nhiên, ta cần có thêm vào một số giả thiết để bắt buộc lời giải được mô tả như trên. Nghĩa là, nếu hàm số f thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

+) đơn điệu trên một khoảng của $\mathbb{R}$;

+) liên tục;

+) bị chặn trên một khoảng;

+) dương với mọi $x \geq 0$.

+) khả vi (cách làm sẽ đơn giản hơn nhiều)

thì lời giải của phương trình hàm Cauchy $f : \mathbb{R} \to S$ là $f(x) = xf(1)$. Cụ thể:

Bài toán 1.1. Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Giải. Từ (1.2) suy ra $f(0) = 0, f(-x) = -f(x)$, với $x = y$ thì

$$f(2x) = 2f(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Giả sử k nguyên dương, $f(kx) = kf(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} f((k+1)x) &= f(kx + x) \\ &= f(kx) + f(x) \\ &= kf(x) + f(x) \\ &= (k+1)f(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có

$$f(nx) = nf(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kết hợp với tính chất $f(-x) = -f(x)$ ta được

$$f(mx) = mf(x),\ \ \forall m \in \mathbb{Z},\ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$