ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN THANH HẰNG

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHIẾU GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU VÀ BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2012

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ của GS.TSKH Lê Dũng Mưu (Viện Toán học Việt Nam). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin cảm ơn quý thầy, cô giảng dạy lớp cao học khóa 4 (2010 - 2012) đã mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong khoa học và cuộc sống.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy, cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 05 năm 2012.

Người viết Luận văn

Nguyễn Thanh Hằng

Mở đầu

Giải tích lồi là bộ môn cơ bản của giải tích hiện đại, nghiên cứu về tập lồi và hàm lồi cùng những vấn đề liên quan. Bộ môn này có vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học ứng dụng, đặc biệt là trong tối ưu hoá, bất đẳng thức biến phân, các bài toán cân bằng. Một trong những vấn đề quan trọng của giải tích lồi đó là phép chiếu. Đây là một công cụ sắc bén và khá đơn giản để chứng minh nhiều định lý quan trọng như Định lý tách, Định lý xấp xỉ tập lồi, Định lý về tồn tại nghiệm của Bất đẳng thức biến phân. Hơn nữa phép chiếu còn được dùng để xây dựng các phương pháp giải nhiều lớp bài toán quan trọng như bài toán quy hoạch lồi, bất đẳng thức biến phân.

Bài toán bất đẳng thức biến phân được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau như kinh tế, kỹ thuật, vật lý toán, vận trù học. Bài toán bất đẳng thức biến phân được giới thiệu bởi Hartman và Stampacchia vào năm 1966. Những nghiên cứu đầu tiên về bài toán này liên quan tới việc giải các bài toán điều khiển tối ưu và các bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng. Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian vô hạn chiều và các ứng dụng của nó được giới thiệu trong cuốn sách *"An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications"* của D. Kinderlehrer và G. Stampacchia , xuất bản năm 1980 và trong cuốn sách *"Variational and Quasivariational Inequalities: Application to Free Boundary Problems"* của C. Baiocci và A. Capelo , xuất bản năm 1984. Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều được giới thiệu khá đầy đủ trong cuốn *Finite-Dimensional Variational-Inequalities and Complementarity Problems* của S. Facchinei and J. Pang (2003).

Những năm gần đây, bài toán bất đẳng thức biến phân đã có những bước phát triển rất mạnh và thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu. Một trong các hướng nghiên cứu quan trọng của bài toán bất đẳng thức biến phân là việc xây dựng các phương pháp giải. Có rất nhiều phương pháp giải, trong đó có phương pháp dựa vào cách tiếp cận điểm bất động. Ý tưởng chính của phương pháp này là chuyển việc giải bất đẳng thức biến phân về bài toán tìm điểm bất động của một ánh xạ thích hợp. Một trong những cách tiếp cận điểm bất động là dựa trên phương pháp chiếu.

Một lớp bài toán quan trọng của bất đẳng thức biến phân là bài toán *Quy hoạch lồi* là một lớp bài toán cơ bản của tối ưu hóa. Một đặc điểm cơ bản nhất của bài toán này là mọi điểm cực tiểu địa phương đều là cực tiểu tuyệt đối. Hơn nữa lý thuyết về bài toán quy hoạch lồi đã được quan tâm nghiên cứu và đã thu được nhiều kết quả quan trọng dựa trên lý thuyết của giải tích lồi và tối ưu hóa. Có nhiều phương pháp hữu hiệu cho bài toán này, các phương pháp đó được giới thiệu trong cuốn sách Tối ưu lồi *(Convex Optimization)* của tác giả Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe do nhà xuất bản Cambridge University Press in năm 2004.

Mục đích của luận văn này chủ yếu trình bày về ứng dụng của phép chiếu vuông góc vào bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán tối ưu.

Luận văn bao gồm 3 chương: Chương 1 nhắc lại các kiến thức cơ bản của tập lồi và hàm lồi, dưới vi phân, tính đơn điệu, phép chiếu lên tập lồi. Chương 2 giới thiệu về bài toán quy hoạch lồi và trình bày phương pháp chiếu dưới gradient xấp xỉ. Chương 3 giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân và trình bày một số phương pháp chiếu để giải bài toán bất đẳng thức biến phân.

Chương 1

Toán tử chiếu lên tập lồi đóng

Dưới đây, ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản của giải tích lồi như: Tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân,.... Các kiến thức trong chương này được lấy chủ yếu từ các tài liệu ([1]), ([2]), ([3]) và sẽ được sử dụng ở các chương sau.

1.1 Một số khái niệm và tính chất cơ bản

1.1.1 Tập lồi và hàm lồi

Đoạn thẳng nối hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$ là tập các véc tơ x có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha a + \beta b; \alpha \geq 0; \beta \geq 0; \alpha + \beta = 1\}.$$

Tập lồi là một khái niệm cơ bản nhất của giải tích lồi nó được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1.1. *Một tập $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một tập lồi, nếu C chứa mọi đoạn thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó. Tức là C lồi khi và chỉ khi*

$$\forall x, y \in C; \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)\, y \in C.$$

Ví dụ 1.1. • Hình cầu đóng $\overline{B}(a,\, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$.

• Toàn không gian, siêu phẳng, hình tam giác, hình vuông, hình tròn, mặt phẳng, nửa mặt phẳng trong $\mathbb{R}^2$.

Mệnh đề 1.1. *Giao của một họ bất kỳ các tập lồi là một tập lồi.*

Chứng minh

Giả sử $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ là họ các tập lồi. Cần chứng minh $A = \bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ là một tập lồi.

• Với mọi $x_1, x_2 \in A$ suy ra $x_1, x_2 \in A_\alpha \quad (\forall\alpha \in I)$.

• Với mọi $\alpha \in I$. Do A_α lồi nên với mọi $\lambda \in [0; 1]$ ta có

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)\, x_2 \in A.$$

Theo định nghĩa $A = \bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ là một tập lồi. □

Mệnh đề 1.2. *(Tính chất tập lồi)*

(i) Nếu $C, D \subset \mathbb{R}^n$ là các tập lồi thì

$$C + D = \{x + y : x \in C, y \in D\}\,;$$

$$\alpha C = \{\alpha x : x \in C, \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

cũng là các tập lồi trong $\mathbb{R}^n$, do đó $C - D = C + (-1)\, D$ là tập lồi trong $\mathbb{R}^n$.

(ii) Nếu $C \subset \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^m$ là tập lồi thì $C \times D = \{(x, y) : x \in C, y \in D\}$ cũng là tập lồi trong $\mathbb{R}^{n+m}$.

Định nghĩa 1.2. *Một tập $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là nón nếu*

$$\forall x \in C, \forall\lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in C.$$

Một nón được gọi là *nón lồi* nếu nó là nón và là một tập lồi.

Định nghĩa 1.3. *Cho $C \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập lồi và $x^o \in C$.*

(i) Tập $N_C\left(x^0\right) := \left\{w : w^t(x - x^0) \le 0; \forall x \in C\right\}$ được gọi là nón pháp tuyến ngoài của C tại x^0 và tập $-N_C\left(x^0\right)$ được gọi là nón pháp tuyến trong của C tại x^0.

(ii) Tập $N_C^\varepsilon\left(x^0\right) := \left\{w : w^t(x - x^0) \le \varepsilon; \forall x \in C\right\}$ được gọi là nón ε - pháp tuyến ngoài của C tại x^0.

Định nghĩa 1.4. *Cho hàm $f : C \to (-\infty; +\infty]$, C lồi là tập con của $\mathbb{R}^n$. Khi đó:*

(a) f được gọi là hàm lồi trên C nếu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in C, \lambda \in [0, 1].$$

(b) f được gọi là lồi chặt trên C nếu với mọi $x, y \in C$ sao cho $x \neq y$ với mọi $\lambda \in (0,1)$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

(c) f được gọi là tựa lồi tại $y \in C$ nếu với mọi $x \in C$ sao cho $f(x) \leq f(y)$ với mọi $\lambda \in [0,1]$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(y).$$

Hàm f được gọi là lồi trên C, nếu nó tựa lồi tại mọi điểm của C.
(d) f được gọi là tựa lồi chặt tại $y \in C$ nếu với mọi $x \in C$ sao cho $f(x) < f(y)$ với mọi $\lambda \in (0,1)$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < f(y).$$

(e) f được gọi là lồi mạnh trên C với hệ số $\beta > 0$ nếu với mọi $x, y \in C, \lambda \in (0,1)$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)\beta||x-y||^2.$$

Hàm lồi mạnh là lồi chặt và lồi chặt suy ra lồi. Chẳng hạn hàm $y = x^2$ là lồi mạnh, do đó lồi chặt và lồi. Điều ngược lại nói chung không đúng. Ví dụ hàm affine $y = ax + b$ lồi nhưng không lồi chặt, hàm $y = \frac{1}{x}$ lồi chặt nhưng không lồi mạnh trên $(0, \infty)$.

Ví dụ 1.2. • Giả sử $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Hàm đặc trưng của C là hàm:

$$\delta_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{khi } x \in C \\ +\infty & \text{khi } x \notin C. \end{cases}$$

$\delta_C(x)$ là hàm lồi khi và chỉ khi C là tập lồi.

• Hàm chuẩn $f(x) = \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in \mathbb{R}^n$ là lồi □

Định nghĩa 1.5. *Cho hàm $f : C \to (-\infty; +\infty]$, C lồi là tập con của $\mathbb{R}^n$. Khi đó, miền hữu hiệu của f, kí hiệu là $domf$, được xác định bởi*

$$domf := \{x \in C : f(x) < +\infty\}.$$

Hàm f được gọi là chính thường nếu:

$$domf \neq \emptyset \quad \text{và} \quad f(x) > -\infty, \quad \forall x \in domf.$$

Mệnh đề 1.3. *Cho hàm $f : C \to \mathbb{R}$ với $C \subseteq \mathbb{R}^n$.*
Nếu f là hàm số khả vi và ∇f liên tục. Khi đó, f là hàm lồi khi và chỉ khi

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \forall x, y \in C.$$

Định nghĩa 1.6. *Hàm $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là liên tục Lipchits quanh x^0 nếu có $L > 0$ và lân cận U của x^0 sao cho*

$$\|f(x) - f(x')\| \leq L \|x - x'\|, \quad \forall x, x' \in U \cap C.$$

Khi đó, L được gọi là hằng số Lipchits. Hàm f được gọi là liên tục Lipchits trên C nếu .

$$\|f(x) - f(x')\| \leq L \|x - x'\|, \quad \forall x, x' \in C.$$

1.1.2 Dưới vi phân

Định nghĩa 1.7. *Véc tơ $w \in \mathbb{R}^n$ được gọi là dưới đạo hàm của f tại $x^0 \in \mathbb{R}^n$ nếu*

$$\langle w, x - x^0 \rangle \leq f(x) - f(x^0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

• Tập hợp tất cả các dưới đạo hàm của hàm f tại x^0 được gọi là *dưới vi phân* của f tại x^0 và kí hiệu là $\partial f(x^0)$. Vậy

$$\partial f(x^0) := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, x - x^0 \rangle \leq f(x) - f(x^0), \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

• Hàm f được gọi là *khả dưới vi phân* tại x^0 nếu $\partial f(x^0) \neq \emptyset$.

Ví dụ 1.3. Cho C là một tập lồi, khác rỗng của không gian $\mathbb{R}^n$. Xét *hàm chỉ* trên tập lồi C có dạng

$$\delta_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in C, \\ +\infty & \text{nếu } x \notin C. \end{cases}$$