ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

HOÀNG VĂN ĐIỆP

ĐIỂM BẤT ĐỘNG VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÍ TỒN TẠI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

HOÀNG VĂN ĐIỆP

ĐIỂM BẤT ĐỘNG VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÍ TỒN TẠI

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60.46.36**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. HOÀNG VĂN HÙNG

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

Mở đầu

Lý thuyết điểm bất động có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực của toán học : phương trình vi phân (thường và đạo hàm riêng), phương trình tích phân, hệ phương trình phi tuyến, phương trình hàm, tối ưu hoá. . . Trong nhiều bài toán liên quan đến các phương trình, vấn đề tồn tại nghiệm của các phương trình được xét là một trong những vấn đề cốt yếu. Nó là cơ sở để phát triển các phương pháp khác nhau tìm nghiệm xấp xỉ hoặc nghiệm chính xác của các phương trình đó. Các định lý tồn tại điểm bất động là công cụ đắc lực để giải quyết vấn đề trên.

Cho X là một tập khác rỗng tùy ý, f là một ánh xạ từ X vào X (ta sẽ gọi một ánh xạ như vậy là một tự ánh xạ của X). Phần tử x* thuộc X gọi là một điểm bất động của f nếu f(x*) = x*.

Để ứng dụng được lý thuyết điểm bất động vào các phương trình khác nhau, phương trình được xét cần phải biến đổi thành phương trình tương đương dạng f(x) = x, trong đó f là một tự ánh xạ của tập X (thường là tập con của tập xác định của phương trình ban đầu). Khi đó vấn đề tồn tại nghiệm của phương trình được xét được quy về vấn đề tồn tại điểm bất động của ánh xạ f.

Các định lý điểm bất động cổ điển nhất là nguyên lý ánh xạ co Banach (1922), định lý điểm bất động Brower(1912), định lý điểm bất động Schauder(1930). Ngay sau khi được chứng minh các định lý này đã tìm được các ứng dụng trong các lĩnh vực vừa kể trên. Luận văn này đề cập đến một số mở rộng của nguyên lý ánh xạ co Banach, định lý Shauder và chứng minh một số khẳng định khác liên quan đến điểm bất động. Để minh hoạ cho các ứng dụng, luận văn đưa ra một số ứng dụng của các định lý và khẳng định trên trong các lĩnh vực sau : lý thuyết hàm, phương trình vi phân, phương trình tích phân, đại số tuyến tính,...

Tác giả chân thành cảm ơn thày hướng dẫn T. S Hoàng Văn Hùng (Viện Khoa học Cơ bản, Đại học Hàng hải Việt Nam) và tập thể các thày cô giáo ngành Toán Ứng dụng, Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, vì đã tận tình hướng dẫn và quan tâm đến công việc của tác giả trong suốt thời gian chuẩn bị luận văn.

Hải phòng, ngày 12 tháng 6 năm 2012

Hoàng Văn Điệp

Chương 1

Nguyên lý ánh xạ co Banach và một số ứng dụng.

1.1 Điểm bất động của một tự ánh xạ trên một tập tuỳ ý và một số định lý tồn tại.

Trong mục này tác giả giới thiệu khái niệm điểm bất động, chứng minh một số định lý tồn tại sơ cấp đối với một tự ánh xạ trên một tập tuỳ ý và cho một số ứng dụng của các định lý này.

Định nghĩa 1.1.1. Cho X là một tập khác rỗng tùy ý, f là một ánh xạ từ X vào X (ta sẽ gọi một ánh xạ như vậy là một tự ánh xạ của X). Phần tử x* thuộc X gọi là một điểm bất động của f nếu f(x*) = x*.

Ký hiệu M(X) là tập các tự ánh xạ của một tập X (ta sẽ luôn giả thiết X khác rỗng). Ta nói hai phần tử f, g của M(X) giao hoán nhau nếu fg = gf, trong đó fg chỉ tích của ánh xạ f với ánh xạ g.

Ký hiệu f^0 chỉ ánh xạ đồng nhất của X, $f^k = f.f^{k-1} = f^{k-1}.f$ gọi là luỹ thừa bậc k của f (k là số nguyên không âm). Rõ ràng các luỹ thừa của f giao hoán nhau.

Mệnh đề 1.1.1. Nếu f,g là hai phần tử giao hoán nhau của M(X) và x* là một điểm bất động của g thì f(x*) cũng là một điểm bất động của g.

Chứng minh. Ta có : g(f(x*)) =f(g(x*)) = f(x*). Vậy f(x*) là một điểm bất động của g.

Mệnh đề 1.1.2. Giả sử f là một tự ánh xạ của X và h = f^k (k là số nguyên dương), A là tập tất cả các điểm bất động của h và được giả thiết là khác rỗng. Khi đó thu hẹp $f\,|_A$ của ánh xạ f là một đơn ánh từ A vào A. Nói riêng, nếu A hữu hạn thì thu hẹp $f\,|_A$ là một song ánh từ A lên A.

Chứng minh. Bởi vì h là một luỹ thừa của f thì f và h giao hoán nhau. Theo mệnh đề 1.1.1 ta có $f\,(A) \subset A$. Nếu tồn tại các phần tử khác nhau a, b của A sao cho f(a) = f(b) thì

$$\mathrm{a = h(a) = f^k(a) = f^{k-1}(f(a)) = f^{k-1}(f(b)) = f^k(b) = h(b) = b}$$

. Mâu thuẫn. Vậy f là một đơn ánh từ A vào A. Nếu A là tập hữu hạn thì một đơn ánh từ A vào A phải là một song ánh.

Mệnh đề 1.1.3. Giả thiết như mệnh đề 1.1.2, chỉ có điều tập các điểm bất động A của h có thể bằng rỗng. Nếu có số nguyên dương p$\geq$ 2 sao cho tập điểm bất động B của h^p thoả mãn $B\backslash A$ khác rỗng thì thu hẹp của f lên $B\backslash A$ là một đơn ánh từ $B\backslash A$ vào $B\backslash A$.

Chứng minh. Nếu x* là một điểm bất động của h thì x* cũng phải là một điểm bất động của $h^p = f^{kp}$ nên $A \subset B$. Áp dụng mệnh đề 1.1.2 ta suy ra thu hẹp của f lên B phải là một đơn ánh từ B vào B. Vậy chỉ cần chứng minh f ánh xạ $B\backslash A$ vào $B\backslash A$. Nếu A bằng rỗng thì không có gì phải chứng minh. Giả sử trái lại A khác rỗng và tồn tại $b \in B\backslash A$ sao cho $f\,(b) \in A$. Khi đó, vì f^{kp-1} và h giao hoán nhau nên theo mệnh đề 1.1.1 $f^{kp-1}\,(f\,(b))$ là một điểm bất động của h, như vậy ta có $b = h^p(b) = f^{kp}(b) = f^{kp-1}(f(b)) \in A$. Mâu thuẫn.

Vậy f ánh xạ $B\backslash A$ vào $B\backslash A$.

Hệ quả : Nếu $B\backslash A$ hữu hạn thì thu hẹp của f lên $B\backslash A$ là một phép thế của $B\backslash A$.

Định lý 1.1.1 (xem [1]) : Giả sử g là một tự ánh xạ của tập X có tập điểm bất động là A (A có thể bằng rỗng). Nếu tồn tại số nguyên dương $m \geq 2$ sao cho g^m có tập điểm bất động là B và $B\backslash A$ có đúng n phần tử $(n \geq 1)$ thì không tồn tại ánh xạ f thuộc M(X) sao cho $f^{n!} = g$.

Chứng minh. Giả sử trái lại tồn tại ánh xạ f thuộc M(X) sao cho $f^{n!} = g$. Áp dụng hệ quả của mệnh đề 1.1.3 ta suy ra thu hẹp của f lên $B\backslash A$ là một phép thế của n phần tử. Bởi vì tập các phép thế của một tập hữu hạn gồm n phần tử là một nhóm gồm n! phần tử với phép hợp thành là tích các ánh xạ, mặt khác chu kỳ của mọi phần tử của một nhóm hữu hạn là ước của cấp (= số phần tử) của nhóm nên ta suy ra thu hẹp của $f^{n!}$ lên $B\backslash A$ phải là ánh xạ đồng nhất. Như vậy $f^{n!} = g$ giữ bất động các phần tử của $B\backslash A$, nói cách khác tập các điểm bất động của g chứa B, trong khi theo giả thiết tập các điểm bất động của g là A - tập con thực sự của B. Mâu thuẫn. Vậy không tồn tại ánh xạ f thuộc M(X) sao cho $f^{n!} = g$.

Từ định lý 1.1.1 suy ra :

Mệnh đề 1.1.4 : Nếu f là tự ánh xạ của tập X và tồn tại số nguyên dương $m \geq 2$ sao cho $f^{n!m}$ có tập điểm bất động B chứa tập các điểm bất động A của $f^{n!}$ như một tập con thực sự thì $B\backslash A$ phải có không ít hơn n + 1 phần tử.

Nhận xét : Mệnh đề 1.1.4 tổng quát hoá mệnh đề 4 trong [1].

Chứng minh. Giả sử tập $B\backslash A$ chứa k phần tử và $1 \leq k \leq n$. Theo định lý 1.1.1 không tồn tại ánh xạ h thuộc M(X) sao cho $h^{k!} = f^{n!} = g$. Nhưng điều này mâu thuẫn, bởi vì $g = \left(f^d\right)^{k!}$ với $d = n!/k!$. Vậy $B \backslash A$ phải có ít nhất n+1 phần tử.

Mệnh đề 1.1.5 : Giả sử f là một tự ánh xạ của tập X . Nếu tồn tại số nguyên dương m sao cho f^m có duy nhất một điểm bất động thì đó cũng chính là điểm bất động duy nhất của f.

Chứng minh. Nếu m = 1 thì không có gì phải chứng minh. Giả sử $m \geq 2$. Vì một điểm bất động của f cũng là một điểm bất động của f^m nên từ giả thiết suy ra f không thể có quá một điểm bất động. Nếu tập điểm bất động của f là rỗng thì với cách ký hiệu như trong mệnh đề 1.1.4 ta có $B \backslash A$ có đúng 1 phần tử. Nhưng rõ ràng $f^{1!m} = f^m$. Vậy áp dụng mệnh đề 1.1.4 với n = 1 ta suy ra $B \backslash A$ phải có ít nhất 2 phần tử. Mâu thuẫn. Vậy f phải có đúng một điểm bất động. Điểm bất động này hiển nhiên trùng với điểm bất động duy nhất của f^m.

Định nghĩa 1.1.2 : Tự ánh xạ f của tập X gọi là một ánh xạ hằng nếu f(X) gồm chỉ một phần tử.

Mệnh đề 1.1.6 : Nếu f là tự ánh xạ của tập X và tồn tại số m nguyên dương sao cho f^m là ánh xạ hằng thì f có điểm bất động duy nhất.

Chứng minh. Nếu $f^m(X) = \{x^*\}$ thì hiển nhiên x^* là điểm bất động duy nhất của f^m . Do đó khẳng định của mệnh đề 1.6 suy ra từ mệnh đề 1.1.5.

Định nghĩa 1.1.3 : Cho f là một tự đồng cấu của không gian véc tơ V. Khi đó f cảm sinh một tự ánh xạ F trên tập X các không gian con của V: F đặt tương ứng không gian con S của V với không gian con f(S) của V. Ta nói không gian con S của V là một không gian con bất biến của f nếu S là một điểm bất động của ánh xạ F, tức là f(S) = S.