ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VĂN VIẾT

PHÂN THỨC HỮU TỶ VÀ MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên — 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VĂN VIẾT

PHÂN THỨC HỮU TỶ VÀ MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: PGS.TS ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên — 2012

Mục lục

Lời nói đầu

Phân thức hữu tỷ xuất hiện ở ba cấp học bậc phổ thông và cả bậc Đại học trong Đại Số, Giải Tích, Hình Học, Tổ Hợp.Vấn đề đặt ra là sử dụng phân thức hữu tỷ vào nghiên cứu Toán sơ cấp như thế nào? Đặc biệt sử dụng các kết quả về phân thức hữu tỷ để vào sáng tác các bài toán mới.

Với những lí do trên, là một giáo viên giảng dạy môn Toán trong trường phổ thông, tôi đã chọn nghiên cứu đề tài: " **Phân thức hữu tỷ và một số hệ phương trình".** Đích cuối cùng mà luận văn muốn đạt được là:

1/ Phân tích phân thức hữu tỷ thành tổng các phân thức đơn giản

2/ Giải hệ phương trình tuyến tính nhiều ẩn có liên quan đến phân thức

3/ Tính tổng và xây dựng một số đồng nhất thức trong tổ hợp

4/ Tính tích phân các phân thức hữu tỷ

5/ Nghiên cứu dãy số qua phân thức hữu tỷ

6/ Xây dựng bất đẳng thức hình học

Luận văn gồm hai chương:

Chương I: Giới thiệu về vành đa thức, số phức và tính đóng đại số của trường $\mathbb{C}$ và việc nhúng $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$ để có thể coi $\mathbb{R}$ như một trường con của trường $\mathbb{C}$. Từ tính đóng của trường $\mathbb{C}$ suy ra sự phân tích đa thức thành tích các nhân tử bất khả quy trong $\mathbb{R}[x]$.

Chương II: Trình bày về phân thức hữu tỷ thành tổng các phân thức đơn giản và một số ứng dụng để: giải một số hệ phương trình, xây dựng các đồng nhất thức, tính các tổng, tính tích phân và một vài dãy số qua phân thức hữu tỷ.

Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi những thiếu sót nhất định, em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ . Em xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới thầy. Em xin cảm ơn chân thành tới Trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên, nơi em đã nhận được một học vấn sau đại học căn bản và cuối cùng, tác giả xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã cảm thông, ủng hộ và giúp đỡ trong suốt thời gian tác giả học Cao học và viết luận văn.

Hải Phòng, tháng 08 năm 2012

Người viết luận văn

Vũ Văn Viết

Chương I

Số phức và vành đa thức

Chương này giới thiệu vành đa thức, vành các chuỗi lũy thừa hình thức và tính đóng đại số của trường các số phức $\mathbb{C}$.

1.1 Tính đóng đại số của trường $\mathbb{C}$

Xét tích Descartes $T = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \left\{ (a,b) \setminus \in \mathbb{R} \right\}$ và định nghĩa phép toán:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$
$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$
$$(a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Để đơn giản, viết $(a,b).(c,d)$ qua $(a,b)(c,d)$. Từ định nghĩa của phép nhân:

(i) Với $i = (0,1) \in T$ có $i^2 = i.i = (0,1)(0,1) = (-1,0)$

(ii)$(a,b)(0,1) = (0,1)(a,b) = (a,b)$

(iii)$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1), \forall (a,b) \in T$

Bổ đề 1.1.1

Ánh xạ $\phi : \mathbb{R} \to T, a \mapsto (a,0)$ là một đơn ánh và thỏa mãn

$\phi(a + a') = \phi(a) + \phi(a'), \phi(aa') = \phi(a)\phi(a'), \forall a, a' \in \mathbb{R}$

Đồng nhất $(a,0) \in T$ với $a \in \mathbb{R}$. Khi đó có thể viết

$(a,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi, i^2 = (-1,0) = -1$.

Ký hiệu $\mathbb{C}$ là tập T cùng với phép toán đã nêu ở trên. Như vậy

$\mathbb{C} = \left\{ a + bi \setminus a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}$ và ta có

$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d$

$a+bi+c+di=a+c+(b+d)i$

$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i.$

Mỗi phần tử $z=a+bi\in\mathbb{C}$ được gọi là một số phức với phần thực a, ký hiệu $\operatorname{Re} z$, và phần ảo b, ký hiệu $\operatorname{Im} z$, còn i gọi là đơn vị ảo. Số phức $a-bi$ được gọi là số phức liên hợp của $z=a+bi$ và ký hiệu là $\bar{z}=\overline{a+bi}$. Dễ dàng kiểm tra $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ và gọi $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$ là môđun của z. Số đối của $z'=c+di$ là $-z'=-c-di$ và ký hiệu

$z-z'=(a+bi)-(c+di)=a-c+(b-d)i.$

Xét mặt phẳng tọa độ (Oxy). Mỗi số phức $z=a+bi$ ta cho tương ứng với điểm $M(a,b)$. Tương ứng này là một song ánh

$$\mathbb{C}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}, z=a+bi\mapsto M(a,b).$$

Khi đồng nhất $\mathbb{C}$ với (Oxy) qua việc đồng nhất z với M, thì mặt phẳng tọa độ với biểu diễn số phức như thế được gọi là mặt phẳng phức hay mặt phẳng Gauss.

Mệnh đề 1.1.2

Tập $\mathbb{C}$ là một trường chứa trường $\mathbb{R}$ như một trường con.

Chứng minh:

Dễ dàng kiểm tra $\mathbb{C}$ là một vành giao hoán với đơn vị là 1. Giả sử $z=a+bi\neq 0$. Khi đó $a^2+b^2>0$. Giả sử $z'=x+yi\in C: zz'=1$ hay $\begin{cases} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$. Giải hệ được $x=\dfrac{a}{a^2+b^2}, y=-\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

Vậy $z'=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$ là nghịch đảo của z. Tóm lại $\mathbb{C}$ là một trường.

vì đồng nhất $a \in \mathbb{R}$ với $a + 0i \in \mathbb{C}$ nên có thể coi $\mathbb{R}$ là trường con của $\mathbb{C}$.

Chú ý rằng nghịch đảo của $z \neq 0$ là $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ và $\frac{z'}{z} = z'z^{-1} = \frac{z'\overline{z}}{|z|^2}$.

Định nghĩa1.1.3

Cho số phức $z \neq 0$. Giả sử M là một điểm trong mặt phẳng biểu diễn số phức z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox và tia cuối OM được gọi là argument của z và ký hiệu $\arg(z)$. Góc $\angle xOM$ được gọi là Argument của z và ký hiệu là Arg z.

Argument của số phức 0 là không định nghĩa

Chú ý rằng, nếu α là một argument của z thì mọi argument của z đều có dạng $\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Với $z \neq 0$, ký hiệu $\alpha + k2\pi$ là Argument của z.

Ký hiệu $r = \sqrt{z\overline{z}}$. Khi đó số phức $z = a + bi, a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$. Vậy khi $z \neq 0$ thì có thể biểu diễn $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ và biểu diễn này được gọi là dạng lượng giác của z.

Mệnh đề 1.1.4

Nếu $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$, $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2), r_1, r_2 \geq 0$ thì

(i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(ii) $z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\right]$

(iii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\right], r > 0.$

Mệnh đề 1.1.5(Moivre)

Nếu $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ thì với mỗi số nguyên dương n ta có

$z^n = r^n\left[\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\right]$.

Hệ quả 1.1.6.

Cho căn bậc n của một số phức $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ta nhận được n giá trị khác nhau $z_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), k = 1,2,...,n$.

Bây giờ ta chỉ ra rằng, mọi đa thức dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có nghiệm trong $\mathbb{C}$. Đó là nội dung của định lý cơ bản của đại số.

Định nghĩa 1.1.7

Trường K được gọi là trường đóng đại số nếu mọi đa thức bậc dương thuộc $K[x]$ đều có nghiệm trong K.

Như vậy, trong $K[x]$ mọi đa thức bậc dương đều phân tích được thành tích các nhân tử tuyến tính khi K là một trường đóng đại số.

Định lý 1.1.8(d'Alembert - Gauus, Định lý cơ bản của đại số)

Mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có ít nhất một nghiệm thuộc $\mathbb{C}$.

Từ định lý 1.1.8 suy ra kết quả sau đây về đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x]$:

Hệ quả 1.1.9

Mọi đa thức thuộc $\mathbb{C}[x]$ với bậc $n > 0$ đều có n nghiệm trong $\mathbb{C}$ và các đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x]$ là các đa thức bậc nhất.

Mệnh đề 1.1.10

Cho $f(x) = \mathbb{R}[x] \backslash \mathbb{R}$. $f(x)$ là đa thức bất khả quy khi và chỉ khi $f(x) = ax + b, a \neq 0$ hoặc $f(x) = ax^2 + bx + c, b^2 - 4ac < 0$.

Định lý 1.1.11

Mỗi đa thức $f(x) = \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ đều có thể phân tích được một cách duy nhất thành dạng

$$f(x) = a(x-a_1)^{n_1} ...(x-a_s)^{n_s} \left(x^2 + b_1 x + c_1\right)^{d_1} ...\left(x^2 + b_r x + c_r\right)^{d_r}$$

với các $b_i^2 - 4c_i < 0, i = 1,...,r; r \geq 1$

1.2 Vành đa thức và nghiệm đa thức

Nhắc lại một vài khái niệm và kết quả trong vành đa thức một biến trên một trường.

Cho trường K và một biến x trên K. Với $n \in \mathbb{N}$, Xét tập hợp:

$$K[x] = \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \setminus a_i \in K\right\} = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \setminus a_i \in K\right\}.$$

Mỗi phần tử $f(x) \in K[x]$ được gọi là một đa thức của biến x với các hệ số $a_i \in K$. Hệ số a_n gọi là hệ số cao nhất, còn hệ số a_o gọi là hệ số tự do của $f(x)$. Khi $a_n \neq 0$ thì n được gọi là bậc của $f(x)$ và được ký hiệu $\deg f(x)$. Riêng đa thức 0 được quy định là có bậc là $-\infty$ hoặc -1.

Định lý 1.2.1.

Ta có $K[x]$ là một vành giao hoán. Hơn nữa $K[x]$ còn là một miền nguyên, có nghĩa: nếu $f(x), g(x) \in K[x]$ thỏa mãn $f(x)g(x) = 0$ thì $f(x) = 0$ hoặc $g(x) = 0$.