ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

––––––––––

NGUYỄN DUY LONG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT LỚP BÀI TOÁN QUY HOẠCH NGUYÊN PHI TUYẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – –

NGUYỄN DUY LONG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT LỚP BÀI TOÁN QUY HOẠCH NGUYÊN PHI TUYẾN

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60.46.36**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. TRẦN VŨ THIỆU

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Tối ưu tổ hợp (Combinatorial Optimization) hay còn gọi là *tối ưu rời rạc* là một bộ phận quan trọng của tối ưu hoá. Nó bao gồm nhiều bài toán tối ưu với biến số nhận các giá trị rời rạc (không liên tục) và nhiều phương pháp giải khác nhau cho các lớp bài toán tổng quát và riêng lẻ. Các bài toán tối ưu tổ hợp rất phong phú, đa dạng và có nhiều ứng đụng rộng rãi trong thực tiễn. Một số mô hình tối ưu tổ hợp thuộc loại các bài toán "dễ giải" (có thuật toán đa thức để giải), nhưng phần lớn là các bài toán "khó giải" (chưa có thuật toán đa thức để giải).

Nhiều vấn đề lý thuyết và thực tiễn có thể diễn đạt dưới dạng một bài toán tối ưu rời rạc. Những bài toán như vậy thường có các cấu trúc riêng nào đó. Nếu biết khai thác cấu trúc riêng đó thì có thể tìm ra cách giải hiệu qủa.

Luận văn đề cập tới một lớp bài toán tối ưu rời rạc, cụ thể là bài toán qui hoạch nguyên phi tuyến (biến số nhận các giá trị nguyên, hàm mục tiêu phi tuyến), có thể giải được bằng thuật toán đa thức nhờ khai thác đặc điểm cấu trúc của bài toán. Bài toán được xét trong luận văn có cấu trúc khá đặc biệt và có nội dung thực tiễn thiết thực. Có thể xem nó như mô hình toán học cho một số bài toán thường gặp trong thực tế (mô hình xếp lịch học tập trong các trường học) và hoàn toàn có thể áp dụng được trong thực tiễn. Việc phân tích lớp bài toán này giúp ích cho việc đi sâu tìm hiểu sau này về các bài toán tối ưu rời rạc nói chung và những ứng dụng của chúng nói riêng.

Nội dung luận văn được chia thành ba chương.

Chương 1 với tiêu đề "Một số kiến thức chuẩn bị" trình bày những kiến thức cơ bản cần thiết về tập lồi và hàm lồi làm cơ sở lý thuyết cho việc phân tích cấu trúc và xây dựng các thuật toán ở những chương sau. Tiếp theo, chương này trình bày vắn tắt khái niệm thuật toán thời gian đa thức. Cuối chương giới thiệu khái quát mô hình và ý nghĩa thực tế của lớp bài toán qui hoạch nguyên phi tuyến được xét trong luận văn.

Chương 2 với tiêu đề "Phương pháp trực tiếp giải bài toán (P)" phân tích cấu trúc đặc biệt và nêu ra những tính chất nghiệm đáng chú ý của bài toán qui hoạch nguyên phi tuyến xét trong luận văn, các tính chất này giúp ích cho việc xây dựng thuật toán giải. Mục tiếp theo của chương trình bày thuật toán thời gian đa thức giải bài toán, bằng cách sử dụng kỹ thuật điều chỉnh dần phương án và kỹ thuật gán số cho các hàng và cột, tương tự như trong các phương pháp giải bài toán vận tải thông thường của qui hoạch tuyến tính. Thuật toán được minh hoạ qua một ví dụ số đơn giản và trực quan.

Chương 3 với tiêu đề "Một số hướng mở rộng bài toán" xét vấn đề xử lý sơ bộ (tiền xử lý) các dữ kiện ban đầu của bài toán nhằm giảm bớt kích thước của bài toán cần giải (nếu có thể). Sau đó, xét sự mở rộng bài toán theo hai hướng: thay đổi điều kiện ràng buộc (thêm hay bớt sinh viên, thêm hay bớt chuyên đề, thêm điều kiện phụ ...) và thay đổi hàm mục tiêu (bài toán với hàm mục tiêu đơn điệu tăng và bài toán với hàm mục tiêu lõm).

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên chắc chắn luận văn còn có những thiếu sót nhất định, kính mong quý thầy cô và các bạn đóng góp để tác giả tiếp tục hoàn thiện luận văn này.

Nhân dịp này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy hướng dẫn GS.TS Trần Vũ Thiệu đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn tập thể thầy cô giáo trường Đại học

Khoa học – Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học – Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, tổ Toán – Tin trường THPT số 1 huyện Bát Xát – Lào Cai và tập thể bạn bè, đồng nghiệp và gia đình đã quan tâm giúp đỡ, động viên tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 7 năm 2012

Người thực hiện

Nguyễn Duy Long

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này sẽ trình bày một số khái niệm và kiến thức cơ bản về giải tích lồi, cần thiết cho việc phân tích lý thuyết và xây dựng thuật toán trong các chương sau. Tiếp đó trình bày khái niệm thuật toán đa thức và cuối cùng giới thiệu bài toán qui hoạch nguyên phi tuyến được xét trong luận văn. Nội dung của chương được tham khảo từ các tài liệu [2], [3] và [6].

1.1 Tập lồi, hàm lồi và một số tính chất

1.1.1 Tập hợp lồi.

Khái niệm về tập hợp lồi là một khái niệm cơ bản của giải tích lồi và quy hoạch lồi. Nhiều tính chất quan trọng và thú vị của bài toán quy hoạch có được trên miền ràng buộc là một tập hợp lồi.

Định nghĩa 1.1. Một tập X trong không gian Euclide R^n được gọi là một tập lồi nếu $\forall x^1, x^2 \in X$ và $\forall \lambda \in [0;1]$ ta có $\lambda x^1 + (1-\lambda^2)x \in X$.

Như vậy nếu X là một tập lồi thì nó chứa trọn đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của nó.

Ví dụ 1.1:

- Các tập afin nói chung đều là tập lồi.
- Các nửa không gian đóng: $\{x :< a, x >\leqslant \alpha\}$, $\{x :< a, x >\geqslant \alpha\}$.

- Các nửa không gian mở: $\{x :< a, x >< \alpha\}$, $\{x :< a, x >> \alpha\}$.
- Siêu phẳng $H = \{x :< a, x >= b\}$ trong R^n.

Bao lồi của một tập A là một tập lồi nhỏ nhất chứa A, ký hiệu là **coA**. Đây chính là giao của tất cả các tập lồi chứa A. Nếu X là một tập lồi thì nó chứa bao lồi của mọi tập con của nó.

Cho A, B là hai tập bất kỳ trong R^n, tổ hợp lồi của A và B là tập hợp tất cả các điểm thuộc R^n có dạng: $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, a $\in$ A, b $\in$ B, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Định lý 1.1. *Tập lồi là đóng với phép giao, phép cộng, phép nhân với một số và phép lấy tổ hợp tuyến tính, tức là nếu A và B là hai tập lồi trong R^n thì các tập hợp sau cũng là lồi:*

1. $A \cap B := \{x : x \in A, x \in B\}$.
2. $\lambda A + \beta B := \{x = \lambda a + \beta b : a \in A,\ b \in B, 0 \leqslant \lambda, \beta \leqslant 1\}$.

Hệ quả. *Miền chứa nghiệm của hệ bất phương trình tuyến tính dạng:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{cases}$$

*là một tập lồi. Người ta còn gọi đó là **tập lồi đa** diện hoặc còn gọi là một khúc lồi. Một khúc lồi giới nội gọi là một **đa diện lồi**.*

Định lý 1.2. *Một tập lồi đa diện X (có thể không giới nội) có ít nhất một đỉnh được biểu diễn bởi tập hợp tât cả những điểm có dạng:*

$x = \sum_{i \in I} \lambda_i d^i + \sum_{i \in I} \mu_j g^j$, *trong đó* $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, λ_i, $\mu_j \geqslant 0$ *với mọi i, j còn các d^i với $i \in I$ là đỉnh của X, với $j \in J$ là phương các cạnh vô hạn của X.*

Chú ý rằng nếu X giới nội thì nó không có các cạnh vô hạn, do đó trong biểu diễn trên chỉ còn lại tổng thứ nhất. Trong trường hợp này, mọi điểm của X đều biểu diễn qua tổ hợp lồi của các đỉnh của X.

1.1.2 Hàm lồi

Định nghĩa 1.2. Hàm số $f(x)$ xác định trên tập lồi $X \subset R^n$ được gọi là **hàm lồi** trên X, nếu với mọi $x,\ y \in X,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ ta có:

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Hàm $f\left(x\right)$ được gọi là hàm **lồi chặt** trên X nếu với $\forall x^1, x^2 \in X, x^1 \neq x^2, 0 < \lambda < 1$ ta có $f\left[(1-\lambda)\,x^1 + \lambda x^2\right] < (1-\lambda)\,f\left(x^1\right) + \lambda f\left(x^2\right)$.

Hiển nhiên hàm **lồi chặt** là hàm lồi, nhưng điều ngược lại chưa chắc đúng. Hàm $f\left(x\right)$ gọi là hàm **tựa lồi** trên tập lồi X nếu

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)\,y\right) \leqslant max\left\{f\left(x\right), f\left(y\right)\right\}\ \forall x, y \in X,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Hàm $f\left(x\right)$ được gọi là **lõm (tựa lõm)** trên tập lồi X nếu hàm $-f\left(x\right)$ là lồi (tựa lồi) trên X.

Như thường lệ, các hàm $\lambda f, f+g, max\left(f,g\right)$ được định nghĩa như sau:

$$\left(\lambda f\right)\left(x\right) := \lambda f\left(x\right),$$

$$\left(f+g\right)\left(x\right) := f\left(x\right) + g\left(x\right),$$

$$max\left(f,g\right)\left(x\right) := max\left(f\left(x\right), g\left(x\right)\right).$$

Các hàm lồi là đóng đối với phép tổ hợp tuyến tính không âm và phép lấy *max*. Cụ thể ta có định lý như sau:

Định lý 1.3. *Cho f là một hàm lồi trên tập lồi X và g là hàm lồi trên tập lồi Y. Lúc đó các hàm sau là lồi trên* $X \cap Y$:

1. $\lambda f + \beta g\ \forall \lambda, \beta \geqslant 0$,

2. $max\left(f,g\right)$.

Định nghĩa 1.3. Cho $X \subset R^n$ khác rỗng và hàm $f : X \to R$ *(không nhất thiết lồi)*. Một điểm $x^* \in X$ được gọi là cực tiểu địa phương của f trên X, nếu tồn tại lân cận mở U của x^* sao cho $f\left(x^*\right) \leqslant f\left(x\right)$ với mọi