ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

– – – – – – – – – – –

Ngô Thị Bích Thủy

GIẢ KHOẢNG CÁCH TƯƠNG ĐỐI KOBAYASHI

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Ngô Thị Bích Thủy

GIẢ KHOẢNG CÁCH TƯƠNG ĐỐI KOBAYASHI

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS. PHẠM VIỆT ĐỨC

Thái Nguyên - 2012

Mục lục

Mở đầu

Bài toán đặc trưng cho tính nhúng hyperbolic của các không gian phức hyperbolic đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu và đã có nhiều kết quả quan trọng trong giải tích phức. Để giải quyết bài toán này, Kobayashi đã đưa ra khái niệm giả khoảng cách tương đối Kobayashi và từ đó đã chứng minh được một tiêu chuẩn định lượng cho tính nhúng hyperbolic của các không gian phức thông qua giả khoảng cách này. Mục đích của đề tài này là trình bày một số kết quả về giả khoảng cách tương đối Kobayashi trên đa tạp phức cùng một số ứng dụng của nó trong bài toán đặc trưng cho tính nhúng hyperbolic của các không gian phức. Luận văn bao gồm 2 chương:

Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về giả khoảng cách Kobayashi, không gian phức hyperbolic và các không gian phức nhúng hyperbolic cùng các tính chất của chúng. Ngoài ra luận văn còn trình bày Định lý Brody đối với tính hyperbolic, đa tạp hầu phức và không gian taut là các kiến thức cần thiết cho việc trình bày các kết quả của chương 2.

Chương 2 là nội dung chính của luận văn. Chương này trình bày một số kết quả về giả khoảng cách tương đối Kobayashi trên không gian phức và một số ứng dụng của nó trong nghiên cứu tính nhúng hyperbolic của các không gian phức. Ngoài ra, chúng tôi còn trình bày một số các kết quả ban đầu về giả khoảng cách tương đối Kobayashi trên đa tạp hầu phức.

Qua đây, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến PGS. TS. Phạm Việt Đức, người đã đưa ra đề tài và tận tình hướng dẫn tác giả trong suốt quá trình viết luận văn. Đồng thời tác giả cũng gửi lời cảm ơn các thầy cô của Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã đóng góp ý kiến để tác giả hoàn thành bản luận văn này. Cuối cùng là lời cảm ơn đến gia đình và bạn bè, những người đã động viên giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập.

Thái Nguyên, năm 2012

Học viên

Ngô Thị Bích Thủy

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Không gian phức

1.1.1 Định nghĩa

Giả sử Z là đa tạp phức. Một **không gian phức đóng** X là một tập con đóng của Z mà về mặt địa phương được xác định bởi hữu hạn các phương trình giải tích. Tức là, với $x_0 \in X$ tồn tại lân cận mở V của x trong Z và hữu hạn các hàm chỉnh hình $\varphi_1, ..., \varphi_m$ trên V sao cho

$$X \cap V = \left\{ x \in V \middle| \varphi_i(x) = 0, i = 1, ..., m \right\}.$$

1.1.2 Điểm chính quy và điểm kỳ dị

Giả sử X là một không gian phức.

Một điểm $a \in X$ được gọi là **điểm chính quy** của X nếu a có một lân cận U trong Z sao cho $U \cap X$ là đa tạp phức. Tập các điểm chính quy của X được kí hiệu là X_{reg}.

Một điểm $a \in X$ được gọi là **điểm kỳ dị** của X nếu nó không là điểm chính quy. Tập các điểm kỳ dị của X được kí hiệu là X_{sin}.

Định lý

Trong không gian phức X tập các điểm chính quy X_{reg} là một đa tạp phức mở và tập các điểm kỳ dị X_{sin} là một không gian phức với $\text{Int } X_{\text{sin}} = \emptyset$.

1.1.3 Định lý Hironaka về giải kỳ dị

Giả sử X là không gian phức. Khi đó, với mọi $x \in X$ tồn tại lân cận mở U chứa x, tồn tại đa tạp giải tích M và ánh xạ chỉnh hình $\pi : M \to U$ lên U sao cho

i) π là ánh xạ riêng;

ii) Ngoài tập hợp các điểm kỳ dị S của X trong U thì

$$\pi : M \setminus \pi^{-1}(S) \to U \setminus S$$

là ánh xạ song chỉnh hình.

1.2 Phủ chỉnh hình

Ánh xạ chỉnh hình $\pi : X' \to X$ giữa các không gian phức được gọi là **phủ chỉnh hình** nếu với mọi $x \in X$, có lân cận mở U chứa x mà $\pi^{-1}(U)$ là hợp rời rạc những tập mở U_α của X' thỏa mãn

$$\pi\big|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U \text{ là song chỉnh hình .}$$

Khi đó X' gọi là không gian phủ, X gọi là đáy của phủ và với mỗi $x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ gọi là thớ trên x của phủ π.

1.3 Không gian phân thớ

1.3.1 Phân thớ véctơ

Ánh xạ liên tục $\pi : E \to X$ giữa các không gian Hausdorff được gọi là **phân thớ** K **- véctơ bậc** r nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

i) Với mỗi $p \in X$, $E_p := \pi^{-1}(p)$ là K - không gian véctơ r chiều (E_p được gọi là thớ trên p);

ii) Với mỗi $p \in X$ tồn tại lân cận U của p và một đồng phôi

$$h : \pi^{-1}(U) \to U \times K^r \text{ thỏa mãn } h(E_p) \subset \{p\} \times K^r,$$

và h^p, xác định bởi phép hợp thành

$$h^p : E_p \xrightarrow{h} \{p\} \times K^r \xrightarrow{proj} K^r,$$

là một đẳng cấu K - không gian véctơ (cặp (U, h) được gọi là một tầm thường hóa địa phương).

Đối với một K - phân thớ véctơ $\pi : E \to X$, E được gọi là không gian toàn thể, X được gọi là không gian đáy, và ta thường nói E là một **phân thớ véctơ** trên X. Ta còn ký hiệu phân thớ véctơ trên là (E, π, X).

1.3.2 Phân thớ chỉnh hình

Nếu E, X là các không gian phức và π là ánh xạ chỉnh hình, toàn ánh, và phép đồng phôi h là ánh xạ song chỉnh hình thì phân thớ véctơ được gọi là phân thớ chỉnh hình.

1.3.3 Phân thớ kéo lùi

Giả sử $\pi : E \to Y$ là một phân thớ véctơ và $f : X \to Y$ là ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức. Khi đó có phân thớ véctơ $\big(f^{-1}E, \pi', X\big)$, trong đó

$$f^{-1}E := \big\{(x, e) \in X \times E;\ \text{thỏa mãn } f(x) = \pi(e)\big\},$$

và $\pi' = pr_1$ là phép chiếu lên thành phần thứ nhất. Phân thớ $\big(f^{-1}E, \pi', X\big)$ được gọi là phân thớ kéo lùi (phân thớ pull-back) của phân thớ (E, π, X) bởi ánh xạ f.

1.4 Giả khoảng cách Kobayashi

1.4.1 Định nghĩa

Với $0 < r < \infty$ ta đặt $D_r = \big\{z \in \mathbb{C}, |z| < r\big\}$, $D_1 = D$, và gọi D_r là đĩa bán kính r, D là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$.

Giả sử X là một không gian phức, x và y là hai điểm tùy ý của X. $\mathrm{Hol}(D, X)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ D vào X, được trang bị tôpô compact mở. Xét các dãy điểm $p_0 = x, p_1, ..., p_k = y$ của X, dãy các điểm $a_1, a_2, ..., a_k$ của D và dãy các ánh xạ $f_1, ..., f_k$ trong $\mathrm{Hol}(D, X)$ thỏa mãn

$$f_i(0) = p_{i-1},\ f_i(a_i) = p_i,\ \forall i = 1, ..., k.$$

Tập hợp $\alpha = \big\{p_0, ..., p_k, a_1, ..., a_k, f_1, ..., f_k\big\}$ thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là một dây chuyền chỉnh hình nối x và y trong X.

Ta định nghĩa

$$d_X(x, y) = \inf_{\alpha} \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \rho_D(0, a_i),\ \alpha \in \Omega_{x,y} \Big\},$$

trong đó $\Omega_{x,y}$ là tập hợp tất cả các dây chuyền chỉnh hình nối x và y trong X.

Khi đó $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ là một giả khoảng cách trên X và gọi là *giả khoảng cách Kobayashi* trên không gian phức X.

Tổng $\ell(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{k} \rho_D(0, a_i)$ được gọi là tổng Kobayashi của dây chuyền chỉnh hình α.

Nếu X không liên thông, ta định nghĩa $d_X(x, y) = \infty$ với x, y thuộc các thành phần liên thông khác nhau.

1.4.2 Một số tính chất của giả khoảng cách Kobayashi

1.4.2.1 Định lý

Nếu $f : X \to Y$ là ánh xạ chỉnh hình giữa hai không gian phức thì f làm giảm khoảng cách đối với giả khoảng cách Kobayashi, nghĩa là

$$d_X(x, y) \geq d_Y(f(x), f(y)) \ \forall x, y \in X.$$

Hơn nữa, d_X là giả khoảng cách lớn nhất trên X thỏa mãn mọi ánh xạ chỉnh hình $f : D \to X$ là giảm khoảng cách.

1.4.2.2 Định lý

Đối với bất kỳ các không gian phức X, Y, ta có

$$d_{X\times Y}\big((x, y), (x', y')\big) = \max\big\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\big\}$$

với mọi $x, x' \in X$ và mọi $y, y' \in Y$.