ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN HƯỞNG

PHƯƠNG PHÁP ĐIỂM TRONG GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH LỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC
Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Thái Nguyên, năm 2012

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Trước khi trình bày nội dung chính của khóa luận, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, người đã tận tình giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu để em có thể hoàn thành khóa luận này.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các quý thầy, cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học - Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình em học tập và nghiên cứu.

Em xin trân thành cảm ơn tập thể bạn bè đồng nghiệp và gia đình đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho em trong suốt quá trình học tập và thực hiện khóa luận tốt nghiệp.

Mặc dù đã hết sức cố gắng, nhưng do năng lực và thời gian còn hạn chế nên chắc chắn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy em mong nhận được sự góp ý, bảo ban của các thầy cô, bạn bè đồng nghiệp và độc giả quan tâm.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 7 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Văn Hưởng

MỞ ĐẦU

Quy hoạch lồi là một lớp bài toán quan trọng của tối ưu hóa. Lớp bài toán này có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như kinh tế, kĩ thuật, công nghệ...

Một tính chất quan trọng của bài toán quy hoạch lồi là nghiệm tối ưu địa phương cũng là nghiệm tối ưu toàn cục. Tính chất này cho phép các công cụ địa phương của giải tích như giới hạn, vi phân, vv... có thể sử dụng hiệu quả trong lớp bài toán quy hoạch lồi. Điều này giải thích vì sao lớp bài toán quy hoạch lồi đã có mặt lý thuyết cũng như phương pháp giải khá hoàn chỉnh.

Một phương pháp giải quan trọng và hiệu quả về mặt tính toán cho lớp bài toán quy hoạch lồi là phương pháp điểm trong.

Mục đích của luận văn là trình bày phương pháp điểm trong để giải bài toán quy hoạch lồi. Việc tìm hiểu và nghiên cứu chủ đề này là rất cần thiết và hữu ích để hiểu được các mở rộng và ứng dụng của phương pháp điểm trong vào các bài toán tối ưu khác.

Luận văn gồm ba chương:

* Chương 1: Giới thiệu những kiến thức cơ bản nhất về giải tích lồi. Đó là tập lồi, tập lồi đa diện, hàm lồi, tính liên tục của hàm lồi, dưới vi phân của hàm lồi và các ví dụ minh họa; chúng được sử dụng ở các chương tiếp theo.

* Chương 2: Trình bày khái niệm bài toán quy hoạch lồi và các tính chất cơ bản của bài toán quy hoạch lồi. Đó là sự tồn tại nghiệm tối ưu và điều kiện tối ưu của bài toán quy hoạch lồi.

* Chương 3: Là chương chính của luận văn. Trình bày phương pháp điểm trong giải bài toán quy hoạch lồi, các ví dụ minh họa, tính đồng thuận và thuật toán gốc.

Chương 1

Tập lồi và hàm lồi trong $\mathbb{R}^n$

Trong chương này chúng ta sẽ trình bày những kiến thức cơ bản về giải tích lồi trong không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$. Các kiến thức này sẽ được sử dụng trong các chương sau. Nội dung của chương được trích dẫn từ các tài liệu tham khảo [1], [2] và [3].

1.1. Tập lồi

1.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.1. *Cho hai điểm a, b trong không gian $\mathbb{R}^n$. Đường thẳng đi qua hai điểm a và b là tập tất cả các điểm x trong $\mathbb{R}^n$ có dạng*

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda \in \mathbb{R}$$

Đoạn thẳng nối hai điểm a, b là tập hợp các điểm có dạng

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda \in [0; 1]$$

Định nghĩa 1.2. *Một tập $C \in \mathbb{R}^n$ được gọi là một tập lồi nếu C chứa mọi đoạn thẳng đi qua hai điểm bất kì của nó. Tức là C lồi khi và chỉ khi*

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0; 1] \Longrightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$$

ta nói x là tổ hợp lồi các điểm (vectơ) $x^1, x^2, ..., x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \lambda_j > 0, \forall j = 1, ..., k, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Định nghĩa 1.3. *Một tập D được gọi là tập affine nếu D chứa mọi đường thẳng đi qua hai điểm bất kỳ $x, y \in D$, tức là*

$$\forall x, y \in D, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in D$$

1.1.2. Tính chất

Mệnh đề 1.1. *Tập hợp C là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi của các điểm của nó. Tức là C lồi khi và chỉ khi*

$$\forall x \in N, \forall \lambda_1, ..., \lambda_k > 0, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \forall x^1, ..., x^k \in C \Longrightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \in C.$$

Chứng minh: Điều kiện đủ là hiển nhiên từ định nghĩa. Ta chứng minh điều kiện cần bằng quy nạp theo số điểm. Với $k = 2$, điều cần chứng minh suy ra ngay từ định nghĩa của tập lồi và tổ hợp lồi. Giả sử mệnh đề đúng với $k - 1$ điểm. Ta cần chứng minh đúng với k điểm.

Giả sử x là tổ hợp lồi của k điểm $x^1, ..., x^k \in C$. Tức là

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \lambda_j > 0 \quad \forall j = 1, ..., k, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Đặt

$$\xi = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j.$$

Khi đó $0 < \xi < 1$ và

$$x = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j x^j + \lambda_k x^k = \xi \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} x^j + \lambda_k x^k.$$

Do

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} = 1$$

và $\frac{\lambda_j}{\xi} > 0$ với mọi $j = 1, .., k - 1$, nên theo giả thiết quy nạp, điểm

$$y := \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} x^j \in C.$$

Ta có

$$x = \xi y + \lambda_k x^k.$$

Do $\xi > 0, \lambda_k > 0$ và

$$\xi + \lambda_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,$$

nên x là một tổ hợp lồi của hai điểm y và x^k đều thuộc C. Vậy $x \in C$.

Mệnh đề 1.2. *Nếu A, B là các tập lồi trong $\mathbb{R}^n$, C là tập lồi trong $\mathbb{R}^m$, thì các tập sau là lồi*

$$A \cap B := \{x | x \in A, x \in B\}$$
$$\alpha A + \beta B := \{x | x = \alpha a + \beta b, a \in A, b \in B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
$$A \times C := \{x \in \mathbb{R}^{n+m} | x = (a; c), a \in A, c \in C\},$$

Chứng minh: Dễ dàng được suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

Mệnh đề 1.3. *$D \neq \emptyset$ là tập affine khi và chỉ khi nó có dạng $D = M + a$ với M là không gian con của $\mathbb{R}^n$ và $a \in \mathbb{R}^n$. Không gian M được xác định duy nhất và được gọi là không gian con song song của D.*

1.1.3. Tập lồi đa diện

Định nghĩa 1.4. *Siêu phẳng trong $\mathbb{R}^n$ là một tổ hợp các điểm có dạng*

$$\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = \alpha\}$$

trong đó $a \in \mathbb{R}^n$ là một vectơ pháp tuyến của siêu phẳng. Một siêu phẳng sẽ chia không gian thành hai nửa không gian.

Định nghĩa 1.5. *Nửa không gian là một tập hợp có dạng*

$$\{x | a^T x \geq \alpha\}$$

trong đó $a \neq 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Đây *là nửa không gian đóng. Tập*

$$\{x | a^T x > \alpha\}$$

là nửa không gian mở.

Như vậy một siêu phẳng chia không gian thành hai nửa không gian, mỗi nửa không gian ở về một phía của siêu phẳng. Nếu hai nửa không gian này là đóng thì phần chung của chúng chính là siêu phẳng đó.

Định nghĩa 1.6. *Một tập hợp $S \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một đơn hình có thứ nguyên bằng k(hoặc nói ngắn gọn là k- đơn hình) nếu S là tổ hợp lồi của $k+1$ vectơ độc lập a-phin. Các vectơ này gọi là đỉnh của đơn hình. Ví dụ, một tam giác trong không gian 3 chiều là 2- đơn hình. Tập hợp*

$$S_k := \{x \in \mathbb{R}^k | x \geq 0, \sum_{j=1}^{k} x_j \leq 1\}$$

được gọi là đơn hình chuẩn tắc trong $\mathbb{R}^k$.

Định nghĩa 1.7. *Một tập được gọi là tập lồi đa diện nếu nó là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng.*

Như vậy, theo định nghĩa, một tập lồi đa diện là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất phương trình tuyến tính. Dạng tường minh của một tập lồi đa diện được cho như sau

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a^j, x\rangle \leq b_j, j = 1, ..., m\}$$

Hoặc nếu ta kí hiệu A là ma trận có m hàng là các vectơ $a^j, j = 1, ..., m$ và vectơ $b^T = (b_1, ..., b_m)$ thì hệ trên được viết là

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$$

Chú ý rằng do một phương trình

$$\langle a, x\rangle = b$$

có thể viết một cách tương đương dưới dạng hai bất phương trình

$$\langle a, x\rangle \leq b, \langle -a, x\rangle \leq b$$

nên tập nghiệm của một hệ hữu hạn các phương trình và bất phương trình là một tập lồi đa diện.

Định nghĩa 1.8. *Bao lồi của một tập D là giao của tất cả các tập lồi chứa D. Bao lồi của tập D được ký hiệu là coD.*

Bao lồi của một tập D là tập lồi nhỏ nhất chứa D.

Định nghĩa 1.9. *Một điểm a của một tập lồi D gọi là điểm trong tương đối nếu với mọi $x \in D$ đều có một số $\lambda > 0$ sao cho $a + \lambda(x - a) \in D$. Tập các điểm trong tương đối của D ký hiệu là riD.*

Định nghĩa 1.10. *Một tập D được gọi là nón nếu*

$$\forall \lambda > 0, \forall x \in D \Rightarrow \lambda x \in D.$$

Một nón được gọi là nón nhọn nếu nó không chứa đường thẳng. Một nón được gọi là nón lồi nếu nó đồng thời là tập lồi. Nếu nón lồi này lại là một tập lồi đa diện thì ta nói nó là nón lồi đa diện.

Định nghĩa 1.11. *Cho $D \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập lồi và $x^0 \in D$.*
(i) Tập

$$N_D(x^0) := \{\omega \in \mathbb{R}^n : \langle \omega, x - x^0 \rangle \leq 0, \forall x \in D.$$

gọi là nón pháp tuyến ngoài của D tại x^0 và tập $-N_D(x^0)$ được gọi là nón pháp tuyến trong của D tại x^0.
(ii) Tập

$$N_D^{\varepsilon}(x^0) := \{\omega \in \mathbb{R}^n : \langle \omega, x - x^0 \rangle \leq \varepsilon, \forall x \in D.$$

được gọi là nón pháp tuyến ε của D tại x^0.

Hiển nhiên $0 \in N_D(x^0)$ và dùng định nghĩa ta có $N_D(x^0)$ là một nón lồi đóng.

Định nghĩa 1.12. *Cho hai tập C và D, ta nói rằng siêu phẳng*

$$H := \{x : \langle v, x \rangle = \lambda\}$$

i) tách hai tập C và D nếu

$$\langle v, a \rangle \leq \lambda \leq \langle v, b \rangle, \forall a \in C, b \in D.$$