ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

ĐÀO THỊ TUYẾT

PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH LIÊN TỤC CHO PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ KHÔNG CHỈNH LOẠI HAMMERSTEIN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

ĐÀO THỊ TUYẾT

PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH LIÊN TỤC CHO PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ KHÔNG CHỈNH LOẠI HAMMERSTEIN

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được trình bày dưới sự hướng dẫn tận tình và sự chỉ bảo nghiêm khắc của thầy giáo GS. TS Nguyễn Bường. Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất đến thầy.

Tôi cũng xin kính gửi lời cảm ơn chân thành đến cô giáo TS. Nguyễn Thị Thu Thủy cùng các thầy giáo cô giáo tham gia giảng dạy khóa học cao học 2010 - 2012, những người đã đem tâm huyết và sự nhiệt tình để giảng dạy và trang bị cho tôi nhiều kiến thức cơ sở.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin Trường ĐHKH, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K4B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Hải Phòng, tháng 07 năm 2012.

Tác giả

Đào Thị Tuyết

LỜI NÓI ĐẦU

Cho H là một không gian Hilbert với chuẩn và tích vô hướng được ký hiệu tương ứng bởi $\|.\|$ và $\langle x^*, x\rangle$. Cho $F_i, i = 1, 2$, là các toán tử phi tuyến đơn điệu và liên tục trên H.

Nội dung chủ yếu ở đây là nghiên cứu phương pháp ổn định để tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình toán tử Hammerstein có dạng:

$$x + F_2F_1(x) = f,\ f \ \in\ \mathcal{R}(I + F_2F_1), \tag{1.1}$$

dựa trên việc xây dựng một hệ phương trình vi phân bậc một, ở đây I là toán tử đơn vị và $\mathcal{R}(A)$ ký hiệu là ảnh của A. Sau đó, phương pháp này được xét liên kết với quá trình xấp xỉ hữu hạn chiều của H. Lưu ý rằng tập nghiệm của (1.1), ký hiệu bởi S_0, là một tập đóng và lồi (xem [7]).
Thông thường, thay cho $F_i, i = 1, 2$, và f ta chỉ biết được các xấp xỉ F_i^h và f_δ thỏa mãn:

$$\begin{aligned}
&\left\|F_1^h(x) - F_1(x)\right\| \leqslant hg(\|x\|),\\
&\left\|F_2^h(x) - F_2(x)\right\| \leqslant hg(\|x\|)\,\forall x \in \mathrm{H},\\
&\|f_\delta - f\| \leqslant \delta
\end{aligned}$$

ở đây $g(t)$ là một hàm thực không âm, không giảm và giới nội (đưa một tập giới nội lên một tập giới nội). Nếu không có thêm điều kiện bổ xung lên F_i như là tính đơn điệu mạnh, phương trình (1.1) là bài toán đặt không chỉnh.
Thật vậy, xét bài toán sau với $H = \mathbf{E}^2$, không gian Ơcơlit, và

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, x = (x_1, x_2).$$

Dễ dàng kiểm tra được $\langle F_1x, x\rangle = x_1^2 \geq 0$, và $\langle F_2x, x\rangle = x_2^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbf{E}^2$. Có nghĩa là $F_i, i = 1, 2$, có tính đơn điệu. Phương trình (1.1) có dạng

$0x_1 = f_1, \quad 2x_1 = f_2$ với $f = (f_1, f_2)$. Rõ ràng, hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $f = (0, f_2)$ với f_2 bất kỳ. Khi $f_\delta = (f_1^\delta, f_2)$ với $f_1^\delta \neq 0$ phương trình không có nghiệm. Vì vậy, (1.1) là một bài toán đặt không chỉnh.

Để giải (1.1) ta phải dùng phương pháp ổn định. Một trong các phương pháp ổn định là dựa trên việc giải phương trình

$$x + F_{2,\alpha}^h F_{1,\alpha}^h(x) = f_\delta \tag{1.2}$$

(xem[7], [11]), ở đây $F_{i,\alpha}^h = F_i^h + \alpha I$, $\alpha > 0$ là một tham số hiệu chỉnh. Với mỗi $\alpha > 0$, phương trình (1.2) có nghiệm duy nhất $x_\alpha^{h,\delta}$, và dãy $\{x_\alpha^{h,\delta}\}$ hội tụ đến nghiệm x_0 thỏa mãn

$$\|x_0\|^2 + \|x_0^*\|^2 = \min_{x \in S_0}\Big(\|x\|^2 + \|F_1(x)\|^2\Big), x_0^* = F_1(x_0), \tag{1.3}$$

khi $(h+\delta)/\alpha, \alpha \to 0$. Hơn thế nữa, nghiệm $x_\alpha^{h,\delta}$ này, với mỗi $\alpha > 0$ cố định, phụ thuộc liên tục vào $F_i^h, i = 1, 2$ và f_δ. Mới đây, việc sử dụng phương trình vi phân để hiệu chỉnh bài toán không chỉnh được nghiên cứu rộng rãi (xem [1], [18] và các tài liệu dẫn), vì khi rời rạc phương trình vi phân ta thu được nhiều phương pháp lặp khác nhau. Tư tưởng đó được áp dụng trong phương pháp này để tìm nghiệm cho phương trình toán tử loại Hammerstein (1.1). Chúng ta tìm một hàm khả vi mạnh $u(t) : [t_0, +\infty) \to H, t_0 \geq 0$, là nghiệm của phương trình vi phân nào đó sao cho

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = x_0. \tag{1.4}$$

Trong phần 2, chúng ta nghiên cứu một hệ phương trình vi phân với nghiệm $u(t), u^*(t)$ ở đây $u(t)$ thỏa mãn (1.4). Xấp xỉ hữu hạn chiều $u_n(t)$ cho $u(t)$ thỏa mãn

$$\lim_{n,t \to +\infty} u_n(t) = x_0,$$

được xét trong chương 2.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày một số khái niệm cơ bản. Các vấn đề liên quan đến đề tài và bài toán đặt không chỉnh được trình bày trong chương này.

Chương 2 trình bày phương pháp hiệu chỉnh liên tục cho phương trình toán tử loại Hammerstein. Hiệu chỉnh liên tục vô hạn chiều và phương pháp hiệu chỉnh liên tục với xấp xỉ hữu hạn chiều cũng được trình bày trong chương này.

MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

Không gian Hilbert thực *ký hiệu là* H
Không gian Banach thực *ký hiệu là* X
Không gian liên hợp của X *ký hiệu là* X^*
Tập rỗng *ký hiệu là* ϕ
Với mọi x *ký hiệu là* $\forall x$
infimum của tập $\{F(x) : x \in \mathrm{X}\}$ *ký hiệu là* $\inf\limits_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}} F(x)$
Ánh xạ đơn vị *ký hiệu là* I
Tập các số thực *ký hiệu là* $\mathbb{R}$
Miền xác định của toán tử A *ký hiệu là* $D(A)$
Ma trận chuyển vị của ma trận A *ký hiệu là* A^T
Toán tử liên hợp của A *ký hiệu là* A^*
Dãy $\{x^n\}$ hội tụ mạnh tới x *ký hiệu là* $x^n \to x$
$x := y$ *tức là* x được định nghĩa bằng y

Chương 1

Một số khái niệm cơ bản

Chương này trình bày một số vấn đề cơ bản như khái niệm về không gian Hilbert, toán tử đơn điệu; bài toán đặt không chỉnh và khái niệm về phương trình toán tử loại Hammerstein.

1.1 Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1.

Không gian định chuẩn thực là một không gian tuyến tính thực X trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in \mathrm{X}$ ta có một số $\|x\|$ gọi là chuẩn của x, thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $\|x\| > 0, \forall x \neq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathrm{X};$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|, \forall x \in \mathrm{X}, \alpha \in \mathbb{R}.$

Định nghĩa 1.2. Cặp $(\mathrm{H}, \langle , \rangle)$ trong đó H là một không gian tuyến tính và

$$\begin{aligned} \langle , \rangle &: \mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện :

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathrm{H}, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in \mathrm{H};$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathrm{H};$

4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in \mathrm{H}$,

được gọi là không gian tiền Hilbert.
Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.
Ví dụ 1.1. $L^2_{[a,b]}$ là không gian các hàm bình phương khả tích trên [a,b] với $f \in L^2_{[a,b]}$ sao cho $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx < +\infty$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

và chuẩn

$$\|f\|_{L^2_{[a,b]}} = \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2 Toán tử đơn điệu

Cho X là không gian Banach thực, $\mathrm{A} : D(\mathrm{A}) \to \mathrm{X}^*$ là một toán tử với miền xác định $D(A) = X$ và miền ảnh $\Re(A)$ nằm trong X^*
Định nghĩa 1.3. Toán tử A được gọi là
a)Đơn điệu, nếu $\langle \mathrm{A}(\mathrm{x}) - \mathrm{A}(y), x - y \rangle \geq 0, \forall x, y \in D(\mathrm{A})$
b)Đơn điệu chặt nếu dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$
c)Đơn điệu đều, nếu tồn tại một hàm không âm $\delta(t)$, không giảm với $t \geqslant 0, \delta(0) = 0$ và

$$\langle \mathrm{A}(x) - \mathrm{A}(y), x - y \rangle \geq \delta(\|x - y\|), \forall x, y \in D(\mathrm{A});$$

Nếu $\delta(t) = c_{\mathrm{A}} t^2$ với c_{A} là một hằng số dương thì A là một toán tử đơn điệu mạnh.
Định nghĩa 1.4. Toán tử A là đơn điệu nếu

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0, \forall x, y \in \mathrm{X}, x^* \in \mathrm{A}(x), y^* \in \mathrm{A}(y)$$

Tập $Gr(\mathrm{A})$ được gọi là đơn điệu nếu nó thỏa mãn bất đẳng thức trên. Nếu $Gr(\mathrm{A})$ không chứa thực sự được trong một tập đơn điệu nào khác trong $\mathrm{X} \times \mathrm{X}^*$ thì toán tử A được gọi là toán tử đơn điệu cực đại.
Toán tử A được gọi là nửa đơn điệu, nếu tồn tại một toán tử compact C

sao cho A + C là một toán tử đơn điệu.
Toán tử A được gọi là toán tử bức nếu

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \langle \mathrm{A}(x), x \rangle / \|x\| = +\infty$$

Một trong những ví dụ về toán tử đơn điệu là ánh xạ đối ngẫu U^s, $s \geqslant 2$. Ánh xạ này tồn tại trong mọi không gian Banach X. Khi $s = 2$ thì U^s thông thường được viết là U và được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian X. Đối với không gian l_p, $1 < p < +\infty, U(x) = \|x\|_{l_p}^{2-p} z$, ở đây $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ..., ...)$ và $z = \left(|x_1|^{p-2} x_1, |x_2|^{p-2} x_2, ... \right) \in l_{p/(p-1)}$. Còn đối với không gian $L_p(\Omega)$, với Ω là một tập đo được của không gian $\mathbb{R}^n$ và chuẩn $\|.\|_{L_p(\Omega)}$, $1 < p < +\infty$, ánh xạ U có dạng

$$U(\varphi) = \|\varphi\|_{L_p(\Omega)}^{2-p} |\varphi(t)|^{p-2} \varphi(t), t \in \Omega.$$

Ánh xạ đối ngẫu chính là toán tử đơn vị I trong không gian H.
U^s hoặc U là một toán tử đơn điệu chặt và có tính chất bức. Trong một số trường hợp không gian $L_p(\Omega)$, U^s còn có tính chất đơn điệu đều và liên tục theo Holder, vì

$$\begin{aligned} &\langle U^s(x) - U^s(y), x - y \rangle \geqslant m_U \|x - y\|^s, m_U > 0, \\ &\|U^s(x) - U^s(y)\| \leqslant c(r) \|x - y\|^{\vartheta}, 0 < \vartheta \leqslant 1, \end{aligned} \tag{1.5}$$

ở đây $c(r)$ là một hàm dương tăng dần của $r = max\{\|\mathrm{x}\|, \|y\|\}$. Nếu $\mathrm{X} = L_2(\Omega)$, là một không gian Hilbert, thì $U^s = I$, $s = 2$, $m_U = 1$, $\vartheta = 1$ và $c(R) = 1$. Với $p \neq 2$ thì đối với các không gian $l_p, L_p, W_p^m, p > 1$, ta có

$$\begin{aligned} &1 < p < 2 : s = 2, m_U = p - 1, c(p) = p2^{2p-1} e^p L^{p-1}, \\ &e = max\{2^{\mathrm{p}}, 2p\}, 1 < L < 3.18, \vartheta = p - 1; \\ &2 < p : s = p, m_U = 2^{2-p}/p, c(p) = 2^p p^{p-2} \{p[p - 1 + max\{\mathrm{p}, \mathrm{L}\}]\}^{-1}, \vartheta = 1 \end{aligned}$$

Phiếm hàm $\varphi(x)$ với $x \in \mathrm{X}$ được gọi là lồi, nếu

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[\varphi(x) + \varphi(y)], x, y \in \mathrm{X}.$$

Phiếm hàm $\varphi(x)$ với $x \in \mathrm{X}$ được gọi là lồi đều, nếu một hàm $\delta(t)$ với tính chất ở trên sao cho

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[\varphi(x) + \varphi(y)] - \frac{1}{4}\delta(\|x - y\|), x, y \in \mathrm{X}.$$