ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

HOÀNG THỊ QUYÊN

CỰC TIỂU HÓA MỘT HÀM HỢP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

HOÀNG THỊ QUYÊN

CỰC TIỂU HÓA MỘT HÀM HỢP

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số : 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. ĐỖ VĂN LƯU

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

Mở đầu

Lớp các bài toán tối ưu với hàm mục tiêu là một hàm hợp, có hoặc không có ràng buộc tập là một bộ phận quan trọng của lớp các bài toán cực trị. Nhiều mô hình các bài toán tối ưu nảy sinh từ lí thuyết các bài toán xấp xỉ. Phương pháp hàm phạt cho phép ta có thể quy bài toán tối ưu đang xét về bài toán không có ràng buộc với hàm mục tiêu là hợp của một hàm lồi và một hàm Lipschitz địa phương hoặc $C^{1,1}$-hàm. Nhiều tác giả đã và đang nghiên cứu đề tài này, và thu được nhiều kết quả phong phú.

Jeyakumar-Yang [13] đã chứng minh các điều kiện tối ưu cấp 2 cho bài toán cực tiểu hóa hợp của một hàm lồi vô hướng nửa liên tục dưới và một hàm khả vi Gâteaux với gradient Lipschitz địa phương ($C^{1,1}$-hàm). Yang-Jeyakumar [15] đã thiết lập các điều kiện tối ưu cấp 1 và cấp 2 cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán đa mục tiêu cực tiểu hóa hợp của một hàm véc tơ lồi và một hàm Lipschitz địa phương bằng phương pháp vô hướng hóa.

Đề tài "Về cực tiểu hóa một hàm hợp" là đề tài có tính thời sự và được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Chính vì thế em chọn đề tài này.

Luận văn trình bày các điều kiện tối ưu cấp 1 và cấp 2 cho bài toán cực tiểu hóa một hàm lồi nửa liên tục dưới và $C^{1,1}$-hàm, và bài toán cực tiểu hóa hợp của một hàm véc tơ lồi và một hàm Lipschitz địa phương.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1: Cực tiểu hợp một hàm lồi và một hàm $C^{1,1}$.

Chương này trình bày các điều kiện tối ưu cấp 2 của Jeyakumar-Yang [13] cho bài toán cực tiểu hóa hợp của một hàm lồi vô hướng, nửa liên tục dưới và một hàm $C^{1,1}$ dưới ngôn ngữ đạo hàm suy rộng cấp 2 theo nghĩa Clarke.

Chương 2: Tối ưu đa mục tiêu với các hàm hợp của hàm lồi và hàm Lipschitz địa phương.

Chương 2 trình bày các điều kiện tối ưu cấp 1 và cấp 2 của Yang-Jeyakumar [15] cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán đa mục tiêu cực tiểu hợp của một hàm véc tơ lồi và một hàm Lipschitz địa phương bằng phương pháp vô hướng hóa. Chú ý rằng các điều kiện tối ưu cấp 2 được trình bày cho không gian hữu hạn chiều.

Nhân dịp này tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS. TS. Đỗ Văn Lưu đã hướng dẫn và chỉ bảo tận tình trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin Trường Đại Học Khoa Học, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K4B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 07 năm 2012.

Tác giả

Hoàng Thị Quyên

Chương 1

Cực tiểu hợp một hàm lồi và một hàm$C^{1,1}$

Chương 1 trình bày các điều kiện tối ưu cấp 2 của Jeyakumar-Yang [13] cho bài toán cực tiểu hóa hợp của một hàm lồi vô hướng, nửa liên tục dưới và một hàm $C^{1,1}$ dưới ngôn ngữ đạo hàm suy rộng cấp 2 theo nghĩa Clarke.

1.1 Đạo hàm cấp 2 suy rộng

Xét bài toán tối ưu :

$$(P) \quad \min_{x \in X} g(F(x)),$$

trong đó X là không gian Banach, g là hàm lồi nửa liên tục dưới, F là $C^{1,1}$ hàm, tức là một hàm khả vi Gâteaux có đạo hàm Lipschitz địa phương. Trong mục này ta đưa ra các định nghĩa và một vài kết quả cơ bản về đạo hàm theo phương cấp hai suy rộng của $C^{1,1}$ hàm.

Giả sử X là không gian Banach thực với chuẩn $||\ .\ ||$. Cặp chính tắc giữa

X và không gian đối ngẫu X^* được kí hiệu bởi $\langle ., . \rangle$.
Bây giờ ta đưa vào đạo hàm theo phương cấp hai suy rộng.

Định nghĩa 1.1

Cho $f : X \to \mathbb{R}$ là một $C^{1,1}$ hàm khi đó đạo hàm theo phương cấp hai suy rộng của f tại x theo phương (u, v) thuộc $X \times X$ được xác định bởi:

$$f^{00}(x, u, v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ s \to 0}} \frac{[\langle \nabla f(y + su), v \rangle - \langle \nabla f(y), v \rangle]}{s}$$

Hessian suy rộng của f tại x theo phương u được xác định bởi:

$$\partial^{00} f(x)(u) = \left\{ x^* \in X^* : f^{00}(x, u, v \geq \langle x^*, v \rangle \forall v \in X \right\}.$$

Chú ý rằng ánh xạ $(u, v) \to f^{00}(x, u, v)$ là hữu hạn và dưới tuyến tính, $\partial^{00} f(x)(u)$ là tập khác rỗng lồi, compac yếu* trong X^* và với mỗi $x, u, v \in X$,

$$f^{00}(x; u, v) = \max \left\{ \langle x^*, v \rangle : x^* \in \partial^{00} f(x)(u) \right\}. \tag{1.1}$$

Trong [5] đã chỉ ra rằng

$$f^{00}(x; u, v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ s,t \to 0}} \frac{[f(y + su + tv) - f(y + su) - f(y + tv) + f(y)]}{st} \tag{1.2}$$

và nếu f khả vi liên tục 2 lần tại x thì Hessian suy rộng $\partial^{00} f(x)(u)$ là tập một điểm với mọi u thuộc X.

Định nghĩa 1.2

Cho $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm $C^{1,1}$. Ta nói rằng hàm f là khả vi chặt hai *lần tại x nếu tồn tại toán tử tuyến tính $D^2 f(x) : X \to X^*$ sao cho:*

$$\langle D^2 f(x)u, v\rangle = \lim_{\substack{y \to x \\ s \to 0}} \frac{[\langle \nabla f(y + su), v\rangle - \langle \nabla f(y), v\rangle]}{s}. \qquad (1.3)$$

Mệnh đề sau đây cho phép ta nhận được một đặc trưng của tính khả vi chặt hai lần của một $C^{1,1}$ hàm.

Mệnh đề 1.1

Cho $f : X \to \mathbb{R}$ là $C^{1,1}$ hàm. Khi đó f là khả vi chặt hai lần tại x nếu và chỉ nếu giới hạn.

$$\lim_{\substack{y \to x \\ s,t \to 0}} \frac{[f(y + su + tv) - f(y + su) - f(y + tv) + f(y)]}{st} \qquad (1.4)$$

tồn tại.

Chú ý rằng trong trường hợp này, hai giới hạn (1.3) và (1.4) là bằng nhau.

Chứng minh

Giả sử f là khả vi chặt 2 lần tại x thì từ (1.2) ta có.

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\substack{y \to x \\ s,t \to 0}} \frac{[f(y + su + tv) - f(y + su) - f(y + tv) + f(y)]}{st} \\
&= \limsup_{\substack{y \to x \\ s \to 0}} \frac{[\langle \nabla f(y + su), v\rangle - \langle \nabla f(y), v\rangle]}{s} \\
&= \lim_{\substack{y \to x \\ s \to 0}} \frac{[\langle \nabla f(y + su), v\rangle - \langle \nabla f(y), v\rangle]}{s}.
\end{aligned}$$

Như vậy từ (1.3) ta có

$$\limsup_{\substack{y \to x \\ s,t \to 0}} \frac{[f(y + su + tv) - f(y + su) - f(y + tv) + f(y)]}{st}$$

$$= \langle D^2 f(x)u, v\rangle = -\langle D^2 f(x)(-u), v\rangle$$
$$= -\limsup_{\substack{y\to x\\ s,t\to 0}} \frac{[f(y+s(-u)+tv) - f(y+s(-u)) - f(y+tv) + f(y)]}{st}$$
$$= \liminf_{\substack{y\to x\\ s,t\to 0}} \frac{[f(y+(-s)u+tv) - f(y+(-s)u) - f(y+tv) + f(y)]}{(-s)t}.$$

Từ đó suy ra giới hạn (1.4) tồn tại.

Giả sử rằng (1.4) tồn tại. Khi đó,

$$\limsup_{\substack{y\to x\\ s,t\to 0}} \frac{[f(y+su+sv) - f(y+su) - f(y+tv) + f(y)]}{st}$$
$$\geq \limsup_{\substack{y\to x\\ s\to 0}} \frac{[\langle \nabla f(y+su), v\rangle - \langle \nabla f(y), v\rangle]}{s}$$
$$\geq \liminf_{\substack{y\to x\\ s\to 0}} \frac{[\langle \nabla f(y+su), v\rangle - \langle \nabla f(y), v\rangle]}{s}$$
$$\geq \liminf_{\substack{y\to x\\ s,t\to 0}} \frac{[f(y+su+sv) - f(y+su) - f(y+tv) + f(y)]}{st}.$$

Do sự tồn tại của giới hạn (1.4), ta suy ra giới han (1.3) tồn tại. $\square$

Dễ dàng thấy rằng từ định nghĩa 1.2 ta suy ra nếu f_1 và f_2 hai lần khả vi chặt tại x và $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ thì $\lambda f_1 + \mu f_2$ là hai lần khả vi chặt tại x. Một $C^{1,1}$-hàm là khả vi chặt hai lần tại x nếu và chỉ nếu $\partial^{00} f(x)(u)$ là tập một điểm với mỗi u thuộc X. Trong trường hợp đó $\partial^{00} f(x)(u) = \{D^2 f(x)u\}$ (xem [5]). Như vậy, mọi hàm khả vi liên tục Fréchet hai lần là khả vi chặt hai lần.

Mệnh đề 1.2 ([5])

Giả sử $f : X \to \mathbb{R}$ là một $C^{1,1}$ hàm. Khi đó, các ánh xạ $x \to f^{00}(x; u, v)$ và $(x, u) \to f^{00}(x; u, v)$ là nửa liên tục trên tại x và (x, u)