ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN QUYỀN

HIỆU CHỈNH BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VỚI TOÁN TỬ LOẠI ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC
Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Thái Nguyên, năm 2012

Mục lục

MỞ ĐẦU

Cho X là một không gian Banach thực phản xạ, X^* là không gian liên hợp của X, cả hai có chuẩn đều được kí hiệu là $\|.\|$, $A : X \to X^*$ là toán tử đơn điệu đơn trị và K là một tập con lồi đóng của X. Bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu được phát biểu như sau: với $f \in X^*$ cho trước, hãy tìm phần tử $x^0 \in K$ sao cho

$$\langle Ax^0 - f, x - x^0 \rangle \geq 0, \ \forall x \in K, \tag{0.1}$$

ở đây $\langle x^*, x\rangle$ là kí hiệu giá trị phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ tại $x \in X$. Nếu $K \equiv X$ thì bài toán (0.1) có dạng phương trình toán tử

$$Ax = f. \tag{0.2}$$

Bất đẳng thức biến phân đơn điệu (0.1) là lớp bài toán nảy sinh từ nhiều vấn đề của toán học ứng dụng như phương trình vi phân, các bài toán vật lý toán, tối ưu hóa. Ngoài ra nhiều vấn đề thực tế như bài toán cân bằng mạng giao thông đô thị, mô hình cân bằng kinh tế vv... đều có thể mô tả được dưới dạng của một bất đẳng thức biến phân đơn điệu. Rất tiếc rằng bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu, nói chung, lại là một bài toán đặt không chỉnh *(ill-posed)* theo nghĩa nghiệm của nó không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện đầu vào. Do đó việc giải số của bài toán này gặp khó khăn, lý do là một sai số nhỏ trong dữ kiện của bài toán có thể dẫn đến sai số bất kì trong lời giải. Vì thế, người ta phải sử dụng những phương pháp giải ổn định sao cho khi sai số của dữ kiện càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán ban đầu. Một trong những phương pháp được sử dụng rộng rãi và rất có hiệu quả là phương pháp hiệu chỉnh

Tikhonov. Bằng phương pháp này, I. P. Ryazantseva [4] đã xây dựng nghiệm hiệu chỉnh cho bất đẳng thức biến phân đơn điệu (0.1) trên cơ sở tìm phần tử $x_\alpha^{h,\delta} \in K$ sao cho

$$\langle A_h x_\alpha^{h,\delta} + \alpha J(x_\alpha^{h,\delta}) - f_\delta, x - x_\alpha^{h,\delta}\rangle \geq 0,\ \forall x \in K, \tag{0.3}$$

trong đó (A_h, f_δ) là xấp xỉ của (A, f), A_h là toán tử đơn điệu từ X vào X^*, $J : X \to X^*$ là ánh xạ đối ngẫu của X, $\alpha > 0$ là một tham số dương (gọi là tham số hiệu chỉnh) phụ thuộc vào h và δ.

Nếu toán tử nhiễu A_h không đơn điệu thì bất đẳng thức biến phân hiệu chỉnh (0.3) có thể không có nghiệm. Trong trường hợp này Liskovets [3] đã đưa ra bất đẳng thức biến phân hiệu chỉnh dạng

$$\begin{aligned}\langle A_h x_\alpha^\tau + \alpha J(x_\alpha^\tau) - f_\delta, x - x_\alpha^\tau\rangle \geq -\nu g(\|x_\alpha^\tau\|)\|x - x_\alpha^\tau\|,\\ \forall x \in K,\ x_\alpha^\tau \in K,\end{aligned} \tag{0.4}$$

ở đây $\nu \geq h$, $\tau = (h, \delta)$.

Trong rất nhiều bài toán thực tế tập ràng buộc K của bất đẳng thức biến phân (0.1) lại được cho xấp xỉ. Do đó việc hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân (0.1) trong trường hợp này cũng đặc biệt được quan tâm nghiên cứu.

Mục đích của luận văn nhằm trình bày kết quả trong [1], [3], [4] về hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân (0.1) đơn điệu với tập ràng buộc chính xác và tập ràng buộc được cho xấp xỉ đồng thời trình bày phương pháp hiệu chỉnh trong trường hợp toán tử nhiễu không đơn điệu trên cơ sở sử dụng ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J của X làm thành phần hiệu chỉnh.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 giới thiệu khái niệm và kết quả của toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Banach phản xạ thực X, giới thiệu về bất đẳng thức biến phân đơn điệu, trình bày sự tồn tại và tính chất của tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân đơn điệu. Mối liên hệ của bất đẳng thức biến phân đơn điệu và bài toán cực tiểu hàm lồi được trình bày trong phần cuối của chương.

Trong chương 2 sẽ trình bày phương pháp hiệu chỉnh, sự hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh, cách chọn tham số hiệu chỉnh cho bất đẳng thức biến phân với tập ràng buộc chính xác. Trong phần thứ hai của chương trình bày phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với tập ràng buộc xấp xỉ và phần cuối của chương là kết quả về bất đẳng thức biến phân với toán tử nhiễu không đơn điệu của Liskovets.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Tiến sĩ Nguyễn Thị Thu Thủy đã tận tình hướng dẫn tôi hoàn thiện luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thày, cô công tác tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin - Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học quốc gia Hà Nội, đã truyền thụ kiến thức cho tôi trong suốt quá trình học tập vừa qua.

Tôi cũng xin cảm ơn cơ quan, bạn bè đồng nghiệp, gia đình đã chia sẻ, giúp đỡ, động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành luận văn này.

Tác giả

Nguyễn Văn Quyền

MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

H	không gian Hilbert thực
X	không gian Banach thực
X^*	không gian liên hợp của X
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
$\emptyset$	tập rỗng
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\inf\limits_{x \in X} F(x)$	infimum của tập $\{F(x) : x \in X\}$
I	ánh xạ đơn vị
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
$a \sim b$	a tương đương với b
A^*	toán tử liên hợp của toán tử A
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền giá trị của toán tử A
$x^k \to x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới x
$x^k \rightharpoonup x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới x

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân loại đơn điệu

1.1. Toán tử đơn điệu cực đại

Cho X là một không gian Banach thực phản xạ, X^* là không gian liên hợp của X, cả hai có chuẩn đều được kí hiệu là $\|.\|$, kí hiệu $\langle x^*, x\rangle$ là giá trị của phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ tại $x \in X$. Các khái niệm và kết quả trong phần này được tham khảo trong các tài liệu [1], [2] và [5].

1.1.1 Một số tính chất hình học của không gian

Định nghĩa 1.1. Không gian Banach X được gọi là lồi chặt nếu mặt cầu đơn vị $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ của X là lồi chặt, tức là từ $x, y \in S$ kéo theo $\|x + y\| < 2$.

Ví dụ 1.1. Không gian $L^p[a, b]$, $1 < p < \infty$ là một không gian lồi chặt.

Định nghĩa 1.2. Không gian Banach X được gọi là lồi đều nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in X$ thỏa mãn

$\|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1,\ \|x-y\| = \varepsilon$ thì bất đẳng thức

$$\|x+y\| \leq 2(1-\delta)$$

đúng.

Ví dụ 1.2. Không gian Hilbert là không gian lồi đều.

Định nghĩa 1.3. Không gian Banach thực X được gọi là không gian có tính chất Ephimov-Stechkin (hay không gian có tính chất E-S) nếu X phản xạ và trong X sự hội tụ yếu các phần tử $\big(x_n \rightharpoonup x\big)$ và sự hội tụ chuẩn $\big(\|x_n\| \to \|x\|\big)$ luôn kéo theo sự hội tụ mạnh $\big(\|x_n - x\| \to 0\big)$.

Ví dụ 1.3. Không gian Hilbert là không gian có tính chất E-S.

1.1.2 Toán tử đơn điệu cực đại

Cho toán tử đơn trị $A : X \to 2^{X^*}$, như thường lệ ta ký hiệu miền hữu hiệu của A là $D(A)$, miền giá trị của A là $R(A)$ và đồ thị của A là GrA. Theo định nghĩa ta có:

$$\begin{aligned}
&D(A) = \mathrm{dom}A := \{x \in X : Ax \neq \emptyset\},\\
&R(A) := \{y \in Y^* : y = Ax,\ x \in D(A)\},\\
&GrA := \{(x,y) : y \in Ax,\ x \in X\}.
\end{aligned}$$

Định nghĩa 1.4. Một tập $G \subseteq X \times X^*$ được gọi là đơn điệu nếu bất đẳng thức

$$\langle f - g, x - y\rangle \geq 0$$

thỏa mãn với mọi cặp (x,f) và (y,g) của G.

Định nghĩa 1.5. Toán tử $A : X \to 2^{X^*}$ được gọi là

(i) đơn điệu nếu đồ thị của nó là một tập đơn điệu, nghĩa là với mọi $x, y \in D(A)$ ta có

$$\langle f - g, x - y\rangle \geq 0,\ \forall f \in Ax,\ \forall g \in Ay.$$

(ii) đơn điệu chặt nếu đẳng thức trong bất đẳng thức trên chỉ thỏa mãn khi $x = y$.

(iii) đơn điệu đều nếu tồn tại một hàm liên tục, tăng $\gamma(t)$, $(t \geq 0)$, $\gamma(0) = 0$ sao cho bất đẳng thức

$$\langle f - g, x - y\rangle \geq \gamma(\|x - y\|),\ \forall f \in Ax,\ \forall g \in Ay$$

thỏa mãn với mọi $x, y \in D(A)$. Nếu $\gamma(t) = ct^2$, ở đây c là một hằng số dương thì A là toán tử đơn điệu mạnh.

Trong trường hợp toán tử $A : X \to X^*$ đơn trị thì ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.6. Toán tử $A : X \to X^*$ được gọi là

(i) đơn điệu nếu

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0,\ \forall x, y \in D(A);$$

(ii) đơn điệu đều nếu tồn tại một hàm không âm $\delta(t)$, không giảm với $t \geq 0$, $\delta(0) = 0$ và

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \delta(\|x - y\|),\ \forall x, y \in D(A).$$

Nếu $\delta(t) = c_A t^2$ với c_A là một hằng số dương thì toán tử A được gọi là đơn điệu mạnh.

(iii) ngược đơn điệu mạnh nếu tồn tại một hằng số $m_A > 0$ thỏa mãn

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq m_A\|Ax - Ay\|^2,\ \forall x, y \in D(A).$$