ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN THỊ HOÀNG XA

NGHIỆM MẠNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – –

NGUYỄN THỊ HOÀNG XA

NGHIỆM MẠNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60.46.36**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. HÀ TIẾN NGOẠN

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

MỞ ĐẦU

Đối với phương trình elliptic tuyến tính cấp 2 thì người ta đưa vào xét một số loại nghiệm. Nghiệm cổ điển là những hàm số khả vi hai lần liên tục và thỏa mãn phương trình khắp nơi. Nhưng nghiệm mạnh chỉ là những hàm số có đạo hàm đến cấp 2, bình phương khả tích và thỏa mãn phương trình hầu khắp nơi.

Dựa vào các tài liệu [1], [2], [3] luận văn đã trình bày khái niệm nghiệm mạnh của phương trình elliptic tuyến tính cấp 2 và nghiên cứu tính chất trơn của nghiệm mạnh.

Luận văn được chia làm 2 chương:

Chương 1 trình bày các không gian Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ và các định lý nhúng được dựa trên tài liệu [1], [2]

Chương 2 đưa vào khái niệm nghiệm mạnh và nghiên cứu độ trơn của nghiệm mạnh bên trong miền được dựa trên tài liệu [3].
Luận văn đã chỉ ra rằng khi độ trơn của hệ số và của vế phải tăng lên thì độ trơn của nghiệm manh cũng tăng lên theo và nó trở thành nghiệm cổ điển của phương trình.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên trong quá trình viết luận văn cũng như trong xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những sai sót nhất định. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Nhân dịp này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy hướng dẫn PGS-TS Hà Tiến Ngoạn đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy, cô giáo Trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, Khoa Cơ bản trường Cao đẳng Cộng đồng Hải Phòng và tập thể bạn bè đồng nghiệp cùng gia đình đã quan tâm giúp đỡ, động viên tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2012.

Người thực hiện

Nguyễn Thị Hoàng Xa

Chương 1

KHÔNG GIAN SOBOLEV

Một trong những bài toán quan trọng của phương trình đạo hàm riêng là phương trình Poisson:

$$\Delta u = f. \tag{1.1}$$

Nghiệm yếu u(x) của phương trình (1.1) thỏa mãn đồng nhất thức tích phân:

$$\int_{\Omega} \mathrm{DuD}\varphi dx = -\int_{\Omega} f\varphi dx,$$

trong đó: $u\left(x\right) = u\left(x_1, ..., x_n\right)$ là ẩn hàm, $f\left(x\right) = f\left(x_1, ..., x_n\right)$ là hàm số được cho trước, $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $\varphi\left(x\right) = \varphi\left(x_1, ..., x_n\right) \in C_0^1\left(\Omega\right)$ là không gian các hàm số khả vi liên tục và có giá compact,
$Du = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right), DuD\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$.
Đặt:

$$(u, \varphi) = \int_{\Omega} \mathrm{DuD}\varphi dx. \tag{1.2}$$

Để nghiên cứu nghiệm của phương trình Poisson ta xem xét một cách tiếp cận khác đối với phương trình này.
Dạng song tuyến tính $(u, \varphi) = \int\limits_{\Omega} \mathrm{DuD}\varphi dx$ là một tích trong của không gian $C_0^1\left(\Omega\right)$ và bao đóng của $C_0^1\left(\Omega\right)$ theo metric cảm sinh bởi (1.2) là

không gian Hilbert mà người ta kí hiệu là $W_0^{1,2}(\Omega)$.
Hơn nữa, phiếm hàm tuyến tính F được định nghĩa bởi:

$$F(\varphi) = -\int_{\Omega} f\varphi dx$$

có thể được mở rộng đến một phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên không gian $W_0^{1,2}(\Omega)$. Theo định lý Riesz tồn tại một phần tử $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ thỏa mãn $(u, \varphi) = F(\varphi), \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$.

Định lý Riesz: *Với mọi phiếm hàm tuyến tính bị chặn F trong không gian Hilbert H luôn tồn tại một phần tử xác định duy nhất $f \in H$ sao cho $F(x) = (x, f)$ với mỗi $x \in H$ và $\|F\| = \|f\|$.*

Với

$$\begin{aligned} (x, f) &= \frac{F(x)}{F(f)}\|f\|^2 \\ \|F\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, f)|}{\|x\|} \\ \|f\|^2 &= (f, f) = F(f) \end{aligned}$$

Do đó sự tồn tại nghiệm suy rộng của bài toán Diriclet:

$$\begin{cases} \Delta u &= f \\ u &= 0 \quad \text{trên } \partial\Omega \end{cases}$$

thực sự được thiết lập.

Vấn đề về sự tồn tại nghiệm cổ điển được chuyển đổi tương ứng thành các vấn đề về tính chính quy của nghiệm suy rộng theo điều kiện biên trơn thích hợp. Định lý Lax-Milgram sẽ được áp dụng đối với phương trình elliptic tuyến tính theo dạng Div. Tương tự như việc áp dụng định lý Riesz ở trên bằng các lí luận khác nhau dựa trên đồng nhất thức tích phân, kết quả chính quy sẽ được thiết lập.

Tuy nhiên trước khi thực hiện một cách cụ thể, ta đi khảo sát lớp các không gian Sobolev, đó là $W^{k,p}(\Omega)$ và$W_0^{k,p}(\Omega)$ mà $W_0^{1,2}(\Omega)$ là một trường hợp riêng.

1.1 Không gian $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)\,;\mathrm{W}_0^{k,p}(\Omega)$

1.1.1 Không gian $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$:

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn.

$x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in \Omega$

a. Không gian $L^p(\Omega)$;$(1 \le p < +\infty)$

$L^p(\Omega)$ là không gian Banach cổ điển gồm các hàm đo được trên Ω và p-khả tích. Tức là

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty.$$

Chuẩn của phần tử trong $L^p(\Omega)$ được định nghĩa bởi:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p},$$

trong đó: $|u(x)|$ là trị tuyệt đối của $u(x)$.

Khi $p = +\infty$; $L^\infty(\Omega)$ là không gian Banach các hàm bị chặn trên Ω với chuẩn:

$$\|u\|_{\infty,\Omega} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_\Omega |u|\,. \tag{1.3}$$

Khi không có sự nhập nhằng, chúng ta sẽ dùng $\|u\|_p$ thay cho $\|u\|_{L^p(\Omega)}$:

Bất đẳng thức Young:

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}, \tag{1.4}$$

trong đó $p, q \in \mathbb{R}; p > 0, q > 0$ *thỏa mãn:* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Khi **p=q=2**;(1.4) chính là bất đẳng thức Cauchy. Thay thế a bởi $\varepsilon^{1/p}a$, b

bởi $\varepsilon^{-1/p}b$, với $\varepsilon > 0$ khi đó (1.4) trở thành bất đẳng thức nội suy:

$$|ab| \le \frac{\varepsilon\,|a|^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-q/p}\,|b|^q}{q} \le \varepsilon\,|a|^p + \varepsilon^{-q/p}\,|b|^q\,. \tag{1.5}$$

Bất đẳng thức Holder:

$$\int_\Omega |uv|\,dx \le \|u\|_p \|v\|_q \tag{1.6}$$

với $u \in L^p(\Omega)\,, v \in L^q(\Omega)$ *và* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,$

(1.6) là hệ quả của bất đẳng thức Young, khi $p = q = 2$, bất đẳng thức Holder trở thành bất đẳng thức Schwarz.

Bất đẳng thức Holder sử dụng trong trường hợp tổng quát đối với m hàm $u_1, u_2, ..., u_m$ nằm trong không gian $L^{p_1}, L^{p_2}, ..., L^{p_m}$ như sau:

$$\int_\Omega |u_1 u_2 ... u_m|\,dx \le \|u_1\|_{p_1} \|u_2\|_{p_2} ... \|u_m\|_{p_m} \tag{1.7}$$

với $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + ... + \dfrac{1}{p_m} = 1.$

Bất đẳng thức Holder cũng được sử dụng để nghiên cứu chuẩn trong L^p khi coi đó là các hàm của p:

$$\phi_p(u) = \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u^p|\,dx \right)^{1/p}. \tag{1.8}$$

Với $p > 0$, $\phi_p(u)$ là hàm không giảm theo p, với u cố định.

Không gian $L^p(\Omega)$ là khả li khi $p < \infty$, $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ là không gian con trù mật trong $L^p(\Omega)$.

Không gian đối ngẫu của $L^p(\Omega)$ khi $1 < p < \infty$ đẳng cấu với $L^q(\Omega)$, trong đó $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Vì thế $L^q(\Omega)$ khi $1 < p < +\infty$ được coi là liên hợp của $L^p(\Omega)$. Do đó, $L^p(\Omega)$ là phản xạ khi $1 < p < \infty$

Khi $p = 2$, $L^2(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng:

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\,\overline{v(x)}dx.$$

$$(u,u) = \|u\|^2 = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

Định lý 1.1: *(định lý nhúng $L^p(\Omega)$) Giả sử Ω là miền bị chặn và $1 \le p_1 < p_2$. Khi đó, $L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega)$ và ánh xạ nhúng*

$$j : L^{p_2}(\Omega) \mapsto L^{p_1}(\Omega)$$

là liên tục.

Chứng minh: Giả sử $u \in L^{p_2}(\Omega)$ ta cần chứng minh $u \in L^{p_1}(\Omega)$ hay $\int\limits_{\Omega} |u|^{p_1} dx < +\infty$.

Áp dụng bất đẳng thức Holder với $p = \dfrac{p_2}{p_1}, q = \dfrac{p_2}{p_2 - p_1}$, ta có:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} |u|^{p_1} dx = \int\limits_{\Omega} |u|^{p_1}.1dx &\le \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{p_1 p} dx\right)^{1/p}.\left(\int\limits_{\Omega} 1^q dx\right)^{1/q} \\ &= (mes\Omega)^{1/q}\left(\int\limits_{\Omega} |u|^{p_2} dx\right)^{1/p} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Vì Ω bị chặn và $u \in L^{p_2}(\Omega)$ nên

$$(mes\Omega)^{1/q}\left(\int\limits_{\Omega} |u|^{p_2} dx\right)^{1/p} < +\infty.$$

Vậy $u \in L^{p_1}(\Omega)$.

Từ (1.9) ta suy ra:

$$\begin{aligned} \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{p} dx\right)^{1/p_1} &\le (mes\Omega)^{1/qp_1}.\left(\int\limits_{\Omega} |u|^{p_2} dx\right)^{1/pp_1} \\ &= (mes\Omega)^{1/qp_1}\left(\int\limits_{\Omega} |u|^{p_2} dx\right)^{1/p_2} \\ \Leftrightarrow \|u\|_{L^{p_1}(\Omega)} &\le (mes\Omega)^{1/qp_1}.\|u\|_{L^{p_2}(\Omega)} \end{aligned} \tag{1.10}$$

(1.10) chứng tỏ ánh xạ $j : L^{p_2}(\Omega) \mapsto L^{p_1}(\Omega)$ là liên tục và $\|j\| \le (mes\Omega)^{1/qp_1} = (mes\Omega)^{1/p_1 - 1/p_2}$.

b. Không gian $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$