ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

HÀ THỊ KIM DUNG

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HÀ THỊ KIM DUNG

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

Mục lục i

LỜI NÓI ĐẦU **1**

Nội dung **3**

1 ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN **3**

1.1 Về việc giải phương trình Điôphăng 3

1.2 Phương trình Điôphăng tuyến tính 4

1.3 Phương trình Fermat 7

1.3.1 Các bộ số Pitago 7

1.3.2 Phương trình Fermat 11

1.4 Phương trình Pell 14

1.4.1 Phân số liên tục 15

1.4.2 Phương trình Pell 31

2 MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN **39**

2.1 Bài toán 39

2.2 Về cấu trúc của S: 40

2.3 Chứng minh định lí 2.1 41

2.3.1 Chứng minh $T \subset S$ 42

2.3.2 Xây dựng hoàn chỉnh tập S : 48

Kết luận **52**

Tài liệu tham khảo **54**

LỜI NÓI ĐẦU

Số học là một trong những lĩnh vực cổ xưa nhất của Toán học, và cũng là lĩnh vực tồn tại nhiều nhất những bài toán, những giả thiết chưa có câu trả lời. Một trong những bộ phận quan trọng của Số học được nhiều nhà toán học lớn trên thế giới nghiên cứu, đó chính là ***"Phương trình nghiệm nguyên"***. Trong các kì thi chọn học sinh giỏi trong và ngoài nước, các bài toán về phương trình nghiệm nguyên vẫn luôn là một đề tài hay và khó đối với học sinh. Là một giáo viên dạy bộ môn Toán ở các trường phổ thông, chắc chắn ai cũng muốn trang bị cho mình những kiến thức đầy đủ nhất về vấn đề này. Chính vì vậy, tôi đã chọn "Phương trình nghiệm nguyên" làm luận văn tốt nghiệp của mình.

Nội dung luận văn được chia thành hai chương:

Chương 1: **"Đại cương về phương trình nghiệm nguyên"**, trình bày về việc giải phương trình Điôphăng và phương pháp giải phương trình Điôphăng tuyến tính, phương trình Fermat, phương trình Pell.

Chương 2: **"Một lớp phương trình nghiệm nguyên"**, giới thiệu một lớp phương trình nghiệm nguyên được quan tâm nhiều. Nội dung của chương được viết theo bài báo "The equation $\sum\limits_{i=1}^{9} \frac{1}{x_i} = 1$ in distinct odd integers has only the five known solutions" đăng trên tạp chí "Journal of Number Theory" số 127 năm 2007.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên trong quá trình viết luận văn cũng như trong xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những sai sót nhất định. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự góp ý của các thầy

cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Nhân dịp này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy hướng dẫn GS.TSKH. Hà Huy Khoái đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy, cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học -Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, tổ Khoa học tự nhiên Trường THCS Trần Phú và tập thể bạn bè đồng nghiệp cùng gia đình đã quan tâm giúp đỡ, động viên tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 07 năm 2012.

Người thực hiện

Hà Thị Kim Dung

Chương 1

ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

1.1 Về việc giải phương trình Điôphăng

Trong chương này, chúng ta sẽ làm quen với phương pháp giải các phương trình Điôphăng bậc nhất (tuyến tính) hoặc bậc 2. Đối với các phương trình bậc cao hơn, tồn tại hay không một phương pháp chung để giải? Đó là câu hỏi đã được đặt ra từ thời Điôphăng, và là nội dung của *Bài toán Hilbert thứ 10* nổi tiếng. Xin nhắc lại rằng, tại Đại hội Toán học Quốc tế đầu thế kỉ 20, Hilbert, một trong những nhà toán học lớn nhất của mọi thời đại, đã đề ra *23 bài toán cho toán học của thế kỉ 20.* Cho đến nay, nhiều bài toán trong số đó vẫn đang chờ lời giải. Bài toán thứ 10 mà ta nhắc đến ở đây là: *Có hay không một thuật toán để giải các phương trình Điôphăng?* Nói một cách "nôm na" là: có hay không một phương pháp để khi cho một phương trình Điôphăng tùy ý, ta dùng phương pháp đó để, sau một thời gian hữu hạn, tìm ra nghiệm, hoặc chỉ ra rằng phương trình không tồn tại nghiệm (nguyên). Bài toán Hilbert thứ 10 đã được nhà toán học Nga Yuri Matijasievich giải năm 1970 khi ông mới 21 tuổi. Câu trả lời là: *không tồn tại thuật toán giải phương trình Điôphăng tổng quát.* Như vậy, với các phương trình Điôphăng bậc lớn hơn 2, ta chỉ có thể tìm cách giải từng phương trình cụ thể! Tuy nhiên, cũng có thể kể ra đây một vài phương pháp hay được dùng để giải các phương trình Điôphăng được cho trong chương trình toán phổ thông. Tư tưởng chung của các phương pháp đó là, do chỉ xét các nghiệm nguyên (nhiều khi là nghiệm nguyên dương) nên nếu ta thu hẹp được tập hợp chứa nghiệm (nếu có) thì có thể dùng cách thử toàn bộ để xác định nghiệm.

1. Sử dụng các tính chất chia hết để thu hẹp tập hợp nghiệm có thể
2. Dùng các ước lượng về độ lớn của nghiệm để thu hẹp tập hợp nghiệm có thể. Thông thường, để làm việc đó, cần dựa vào một "nghiệm cực trị" (nhỏ nhất hoặc lớn nhất theo một nghĩa nào đó).

Các "phương pháp" vừa nêu chỉ là các gợi ý. Việc vận dụng chúng một cách linh hoạt được cho qua các bài tập.

1.2 Phương trình Điôphăng tuyến tính

Sách "Đại thành toán pháp" của Lương Thế Vinh đã có hướng dẫn giải bài toán sau đây:

Một trăm con trâu
Một trăm bó cỏ
Trâu đứng ăn năm
Trâu nằm ăn ba
Trâu già ba con một bó
Hỏi mỗi loại trâu có mấy con ?

Theo ngôn ngữ toán học bây giờ, ta có thể giải bài toán trên đây như sau. Gọi x là số trâu đứng, y là số trâu nằm và z là số trâu già (theo quy ước của bài toán, trâu già không đứng, mà cũng không nằm !). Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \dfrac{z}{3} = 100 \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình thứ hai với 3 rồi trừ từng vế cho phương trình thứ nhất, ta được:

$$14x + 8y = 200 \tag{1.1}$$

Phương trình thu được có hai ẩn x, y. Vì x, y là "số trâu" nên rõ ràng x, y phải nhận các giá trị nguyên không âm. Như vậy, phương trình (1.1) thuộc vào lớp phương trình Điôphăng tuyến tính.

Định nghĩa 1.1. *Phương trình Điôphăng tuyến tính* là phương trình có dạng

$$\mathrm{ax} + by = c, \tag{1.2}$$

trong đó a, b, c là các số nguyên, đồng thời các biến x, y cũng chỉ nhận các giá trị nguyên.

Giải phương trình Điôphăng (1.2) tức là tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn (1.2).

Định lý sau đây trả lời câu hỏi khi nào thì phương trình Điôphăng tuyến tính có nghiệm, đồng thời chỉ ra các nghiệm khi chúng tồn tại.

Định lý 1.2. *Giả sử a, b là các số nguyên dương, d là ước chung lớn nhất của a và b, $d = (a, b)$. Khi đó phương trình $ax + by = c$ không có nghiệm nguyên nếu d không chia hết c. Nếu $d \mid c$ thì phương trình có vô số nghiệm. Hơn nữa, nếu $x = x_0, y = y_0$ là một nghiệm nào đó của phương trình, thì mọi nghiệm của phương trình có dạng:*

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)n, \quad y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)n,$$

trong đó n là số nguyên.

Chứng minh. Giả sử (x, y) là một nghiệm của phương trình. Do $d \mid a$,

$d \mid b$ nên $d \mid c$. Như vậy, nếu d không chia hết c thì phương trình không có nghiệm nguyên.

Bây giờ giả sử $d \mid c$. Khi đó, tồn tại các số nguyên s, t sao cho

$$d = as + bt \tag{1.3}$$

Do $d \mid c$ nên tồn tại e nguyên sao cho $de = c$. Nhân hai vế của (1.3) với e ta được:

$$c = de = (as + bt)e = a(se) + b(te).$$

Như vậy, ta có một nghiệm của phương trình cho bởi $x = x_0 = se$, $y = y_0 = te$.

Ta sẽ chứng tỏ tồn tại vô số nghiệm. Đặt $x = x_0 + \frac{b}{d}n, y = y_0 - \frac{a}{d}n$, trong đó n nguyên. Ta thấy (x, y) xác định như trên là một nghiệm, vì

$$ax + by = ax_0 + a.\frac{b}{d}n + by_0 - b.\frac{a}{d}n = ax_0 + by_0 = c.$$

Chỉ còn phải chứng tỏ rằng, mọi nghiệm của phương trình phải có dạng nêu trên. Giả sử (x, y) là một nghiệm tùy ý, tức là $x.y$ nguyên và thỏa mãn $ax + by = c$. Khi đó

$$(ax + by) - (ax_0 + by_0) = 0,$$

suy ra

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Tức là

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y).$$

Chia hai vế của đẳng thức cho d, ta được

$$\frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y) \tag{1.4}$$

Do $d = (a, b)$ nên $\frac{a}{d}$ và $\frac{b}{d}$ nguyên tố cùng nhau. Từ đó suy ra $y_0 - y \,\vdots\, \frac{a}{d}$, tức là tồn tại n nguyên sao cho $\frac{a}{d}n = y_0 - y$. Suy ra $y = y_0 - \frac{a}{d}n$. Thay