ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

CAO TRẦN DŨNG

PHƯƠNG PHÁP NHÁNH VÀ CẬN TRONG TỐI ƯU RỜI RẠC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

CAO TRẦN DŨNG

PHƯƠNG PHÁP NHÁNH VÀ CẬN TRONG TỐI ƯU RỜI RẠC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60.46.36**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. TRẦN VŨ THIỆU

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Tối ưu rời rạc (Discrete Optimization), còn gọi là tối ưu tổ hợp (Combinatorial Optimization), đề cập tới các bài toán tối ưu trong đó một phần hay toàn bộ biến nhận các giá trị nguyên hay rời rạc (không liên tục). Các bài toán tối ưu rời rạc đã và đang được quan tâm nghiên cứu cả về lý thuyết lẫn phương pháp giải, vì chúng có những ứng dụng đa dạng, phong phú trong thực tiễn và nhiều vấn đề lý thuyết cũng như thực tiễn có thể diễn đạt dưới dạng một bài toán tối ưu rời rạc.

Một lớp bài toán tối ưu rời rạc đáng chú ý là bài toán tối ưu với các biến số chỉ nhận hai giá trị 0 hoặc 1, gọi là qui hoạch 0 - 1 hay qui hoạch biến Boole. Nhiều bài toán điển hình của tối ưu rời rạc được phát biểu dưới dạng bài toán qui hoạch 0 - 1, như bài toán phân việc, bài toán cái túi, bài toán người du lich, bài toán phân hoạch tập, phủ tập, sắp xếp tập, bài toán cây Steiner trên đồ thị, ... Hơn nữa về nguyên tắc, mọi bài toán với biến số nguyên hay rời rạc bị chặn đều có thể đưa được về bài toán qui hoạch 0 - 1.

Có nhiều phương pháp giải bài toán tối ưu rời rạc, trong đó đáng chú ý và có hiệu quả hơn cả là các phương pháp nhánh cận, đặc biệt đối với một số bài toán điển hình của tối ưu rời rạc: bài toán qui hoạch 0 - 1, bài toán cái túi, bài toán người du lịch. Cho đến nay phương pháp nhánh cận với nhiều cải tiến khác nhau vẫn là công cụ chủ yếu để giải các bài toán tối ưu rời rạc.

Mục tiêu của luận văn này là tìm hiểu và trình bày lược đồ tổng quát của phương pháp nhánh cận trong tối ưu rời rạc và áp dụng lược đồ đó vào giải một số bài toán tối ưu rời rạc điển hình nói trên. Nội dung đề cập tới trong luận văn được trình bày một cách chặt chẽ về mặt toán học, các thuật toán giải nêu ra đều có kèm theo ví dụ số minh hoạ.

Việc tìm hiểu phương pháp nhánh cận trong tối ưu rời rạc sẽ giúp ích cho việc đi sâu tìm hiểu sau này về nội dung và phương pháp giải các bài toán của tối ưu rời rạc nói chung và những ứng dụng của chúng nói riêng.

Nội dung luận văn được chia thành ba chương.

Chương 1 với tiêu đề "Phương pháp nhánh cận trong tối ưu rời rạc" giới thiệu về bài toán qui hoạch nguyên tuyến tính và bài toán qui hoạch tuyến tính 0 - 1 như trường hợp riêng quan trọng. Tiếp đó trình bày lược đồ tổng quát của phương pháp nhánh cận và áp dụng lược đồ đó vào bài toán qui hoạch nguyên tuyến tính.

Chương 2 với tiêu đề "Bài toán cái túi" trình bày nội dung và ý nghĩa thực tiễn của bài toán cái túi. Đó là bài toán qui hoạch tuyến tính 0 - 1 với một ràng buộc chính duy nhất, dạng đẳng thức hay bất đẳng thức tuyến tính. Bài toán này tuy đơn giản, nhưng lại là bài toán điển hình trong tối ưu rời rạc. Phương pháp nhánh cận là phương pháp thích hợp nhất để giải bài toán nầy. Thuật toán nhánh cận trình bày ở chương này khá độc đáo. Cách tính cận chỉ dựa trên việc giải bài toán qui hoạch tuyến tính đơn giản.

Chương 3 với tiêu đề "Bài toán người du lịch" trình bày nội dung và ý nghĩa của bài toán người du lịch. Đó là một bài toán rất quen thuộc và có tầm quan trọng đặc biệt trong tối ưu rời rạc, vì nó là mô hình toán học cho nhiều vấn đề thực tiễn khác nhau và là một trong những bài toán khó, hiện vẫn được nhiều người quan tâm nghiên cứu. Thuật toán nhánh cận đầu tiên của Little, Murty, Sweeney và Karel được giới thiệu ở chương này có nhiều ý tưởng độc đáo, đặc biệt trong cách phân nhánh và cách tính cận.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn này mới chỉ đề cập tới những nội dung cơ bản của phương pháp nhánh và cận trong tối ưu rời rạc, chưa đi sâu vào các chi tiết thực thi thuật toán. Trong quá trình viết luận văn cũng như trong xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những sai sót nhất định. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Nhân dịp này tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy hướng dẫn GS-TS Trần Vũ Thiệu đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy, cô giáo Trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học-Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, tổ toán –tin Trường THPT Số 1 TP Lào Cai và tập thể bạn bè đồng nghiệp cùng gia đình đã quan tâm giúp đỡ, động viên tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 07 năm 2012.

Người thực hiện

Cao Trần Dũng

Chương 1

PHƯƠNG PHÁP NHÁNH VÀ CẬN TRONG TỐI ƯU RỜI RẠC

Chương này giới thiệu về bài toán qui hoạch nguyên tuyến tính và lược đồ tổng quát của phương pháp nhánh cận trong tối ưu rời rạc. Cuối chương, áp dụng lược đồ nhánh cận vào bài toán qui hoạch nguyên tuyến tính. Nội dung của chương dựa chủ yếu trên các tài liệu [1], [4] và [6].

1.1 Bài toán quy hoạch nguyên tuyến tính

Qui hoạch nguyên tuyến tính (Integer Linear Programming Problem, viết tắt ILP) là bài toán tìm cực tiểu (hay cực đại) của một hàm tuyến tính trên một tập hợp điểm rời rạc, thường là tập điểm nguyên:

(ILP) $\min \left\{ f(x) = c^T x : \mathrm{Ax} = b, x_j \geq 0 \quad \text{nguyên}, j = 1, ..., n \right\}$,
trong đó $A \in R^{m.n}, b \in R^m$ và $c \in R^n$ cho trước.

Khi chỉ có một số, chứ không phải tất cả, các biến là nguyên thì ta gọi đó là bài toán *qui hoạch nguyên hỗn hợp* (Mixed Integer Programming Problem, viết tắt MIP).

Cũng như trong qui hoạch tuyến tính, f được gọi là hàm mục tiêu, tập

$$D = \left\{ x \in R^n : \mathrm{Ax} = b, x_j \geq 0 \quad \text{nguyên}, j = 1, ..., n \right\}$$

gọi là *miền ràng buộc* hay *miền chấp nhận được*. Điểm x ∈ D gọi là một *nghiệm chấp nhận được* hay một *phương án* của bài toán. Một phương án đạt cực tiểu (hay cực đại) của hàm mục tiêu gọi là một *nghiệm tối ưu* hay một *phương án tối ưu*. Nghiên cứu cấu trúc tập ràng buộc D và xây dựng các thuật toán tìm nghiệm tối ưu của bài toán ILP là đối tượng của qui hoạch nguyên tuyến tính.

Sau đây là hai ví dụ đơn giản về bài toán qui hoạch nguyên tuyến tính.

Ví dụ 1.1. Giả sử ta cần đưa qua sông 3 kiện hàng với trọng lượng lần lượt là 3 tạ, 2 tạ và 4 tạ và trị giá mỗi kiện hàng tương ứng là 1, 2 và 3 triệu đồng. Nhưng chỉ có một chiếc thuyền nhỏ, mỗi chuyến chở được tối đa 5 tạ. Hỏi nên xếp lên thuyền những kiện hàng nào để số hàng chuyển được có trị giá lớn nhất?

Bằng cách đưa vào các biến số:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{nếu chọn kiện j} \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}, j = 1, 2, 3,$$

ta có thể diễn đạt vấn đề nêu trên như một qui hoạch nguyên ILP như sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to max \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ 0 \leq x_j \leq 1, \text{nguyên}, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Nếu đòi hỏi rằng các kiện hàng 1 và 2 không được xếp cùng nhau trên thuyền thì phải đặt bài toán như thế nào? Trả lời: thêm vào bài toán trên bất đẳng thức:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

(Vì thế, nếu $x_1 = 1$ thì $x_2 = 0$, còn nếu $x_2 = 1$ thì $x_1 = 0$).

Nếu đòi hỏi rằng chỉ một trong 3 kiện hàng được xếp lên thuyền thì mô hình bài toán ra sao? Trả lời: thêm vào mô hình ban đầu đẳng thức:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

(Vì thế, hoặc $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$ hoặc $x_2 = 1, x_1 = x_3 = 0$ hoặc $x_3 = 1, x_1 = x_2 = 0$). Như vậy ta đã thấy qui hoạch nguyên ILP rất tiện dùng để mô hình hoá các ràng buộc lôgic (chẳng hạn, nếu sự kiện A xảy ra thì sự kiện B không xảy ra, ...).

Ví dụ 1.2. Một hãng hàng không dự định mua một số máy bay Airbus A-3200 và Boing 777 để mở rộng hoạt động. Mỗi máy bay Airbus giá 5 triệu đô và có thời gian sử dụng 6 năm, mỗi máy bay Boing giá 9 triệu đô và có thời gian sử dụng 8 năm (các con số có tính ước lệ). Hãng ước tính chỉ cần mua tối đa 6 máy bay và số tiền để mua máy bay không quá 46 triệu đô. Hỏi hãng nên mua bao nhiêu máy bay mỗi loại để tổng thời gian phục vụ của chúng được lâu nhất?

Bằng cách đưa vào hai biến: x_1 là số máy bay Airbus cần mua và x_2 là số máy bay Boing cần mua, ta có thể diễn đạt vấn đề này như một bài toán nguyên tuyến tính ILP sau (Đáp số: 2 Airbus và 4 Boing, $f_{\max} = 44$ năm):

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 \to max \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 46 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{nguyên} \end{cases}$$

Một lớp qui hoạch nguyên quan trọng là *bài toán qui hoạch tuyến tính 0 - 1.* Đó là bài toán qui hoạch tuyến tính, trong đó mọi biến chỉ lấy giá trị 0 hay 1. Bài toán này còn được biết với tên gọi *bài toán nhị nguyên tuyến tính* hay *bài toán qui hoạch tuyến tính biến Boole.*

. Nhiều bài toán tối ưu rời rạc có thể diễn đạt dưới dạng một qui hoạch tuyến tính 0 - 1. Chẳng hạn: bài toán phân việc, bài toán cái túi, bài toán người du lịch, bài toán phân hoạch tập, phủ tập, sắp xếp tập, bài toán cây Steiner trên đồ thị ... Một số ứng dụng trong công nghiệp như định vị tiện ích (facility location), bài toán với phụ phí cố định, bài toán xếp lịch, thiết kế mạng ... được diễn đạt và giải bằng kỹ thuật qui hoạch tuyến tính 0 - 1.

Qui hoạch tuyến tính 0 - 1 có nhiều ứng dụng trong thực tiễn, đặc biệt trong lập kế hoạch triển khai các dự án với hạn chế về các nguồn lực (vốn, lao động, vật tư, v.v ...).

Để minh hoạ ta nêu đại diện mô hình bài toán "cái túi" nhiều chiều:

(MKP) $\quad x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, i = 1, 2, ..., \ m \\ x_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, ..., \ n, \end{cases}$$

trong đó $a_{\text{ij}}, b_i, c_j \in Z$ (i = 1, 2, ... , m; j = 1, 2, ... , n) là những số cho trước và x_j (j = 1, 2, ... , n) là biến nhị nguyên (biến 0 - 1).

Trong mô hình trên a_{ij} biểu thị lượng tài nguyên i cần dùng để thực hiện dự án j, b_i biểu thị lượng tài nguyên i có thể sử dụng và c_j biểu thị lợi ích thu được khi thực hiện dự án j. Biến quyết định $x_j = 1$ nếu dự án j được chọn thực hiện và $x_j = 0$ nếu trái lại.

Qui hoạch tuyến tính 0 - 1 còn được chú ý là vì về nguyên tắc, mọi bài toán với biến nguyên hay rời rạc bị chặn đều có thể đưa được về bài toán