ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

PHẠM NGỌC ĐIỀN

BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN VÀ ỨNG DỤNG TRONG CƠ HỌC LƯỢNG TỬ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

PHẠM NGỌC ĐIỀN

BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN VÀ ỨNG DỤNG TRONG CƠ HỌC LƯỢNG TỬ

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60.46.36**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Những biến đổi Fourier, Laplace và sự kết hợp trong tính toán của các biến đổi đó là một trong những công cụ có tác dụng to lớn trong toán học lý thuyết và ứng dụng. Vô số các ứng dụng trong vật lý lý thuyết, kỹ thuật điện và nhiều lĩnh vực khác đã khiến cho những biến đổi này là một trong ba tiến bộ quan trọng nhất của toán học trong một phần tư cuối cùng của thế kỷ XIX. Bên cạnh những biến đổi Fourier và Laplace, các nhà Toán học và Vật lý học còn sở hữu một kho tàng các phép biến đổi tích phân khác cho từng phạm vi riêng của mình với những ứng dụng trong thực tế. Tuy nhiên, trong số đó biến đổi Fourier có vai trò nổi bật nhất.

Biến đổi Fourier phân là sự khái quát toán tử vi phân Fourier thông thường bằng cách cho nó phụ thuộc vào một tham số liên tục α (được chứa trong tổ hợp $\frac{\alpha\pi}{2}$ - Điều này cũng được sử dụng xuyên suốt trong nội dung của luận văn). Trong toán học, bậc α của biến đổi Fourier phân là lũy thừa α của toán tử trong biến đổi Fourier thông thường. Biến đổi Fourier phân bậc 1 chính là biến đổi Fourier thông thường. Biến đổi bậc $-\alpha$ chính là biến đổi ngược của biến đổi bậc α.

Với sự phát triển của biến đổi Fourier phân và các khái niệm có liên quan, chúng ta thấy rằng miền tần số thông thường chỉ là trường hợp đặc biệt của sự liên tục các miền Fourier phân đoạn. Trong lý thuyết về việc thay thế tín hiệu đại diện, chúng ta cũng thấy được sự liên quan đến việc phân bố thời gian và tần số. Do đó, tất cả các tính chất của biến đổi Fourier thông thường trở thành một trường hợp đặc biệt của biến đổi Fourier phân.

Những bài viết đầu tiên về biến đổi Fourier phân được thực hiện bởi: Wiener 1929, Condon 1937, Bargmann 1961, de Bruijn 1973. Điều quan trọng là trong suốt thập niên 80 của thế kỉ XX đã xuất hiện nhiều bài viết đi theo hai chiều hướng khác biệt: Namias 1980, McBride và Kerr 1987 và Mustard 1987, 1989, 1991, 1996. Tuy nhiên, số lượng các ấn phẩm chỉ thực sự bùng nổ sau khi phép biến đổi áp dụng trong quang học và xử lý tín hiệu được công bố. Trong đó, có các bài viết của: Lohmann 1993, Ozaktas và Mendlovic 1993a,b; Mendlovic và những người khác, ...

Với vai trò to lớn của phép biến đổi Fourier phân trong toán học và những ngành khoa học khác như đã nêu ở trên, tôi đã chọn và nghiên cứu phép biến đổi này cùng những ứng dụng của nó. Tuy nhiên với điều kiện về không gian, thời gian và trình độ có hạn của bản thân nên cơ bản nội dung biến đổi chủ yếu là biến đổi Fourier phân Namias và ứng dụng trong cơ học lượng tử và nguyên lý bất định đối với phép biến đổi Fourier phân.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc tài liệu từ các tạp chí toán học trong nước và quốc tế liên quan đến phép biến đổi Fourier, ứng dụng của phép biến đổi Fourier phân trong cơ học lượng tử và nguyên lý bất định đối với biến đổi Fourier phân. Qua đó, tìm hiểu, học tập và giới thiệu các vấn đề này.

3. Mục đích của luận văn

Mục đích của luận văn là học tập và giới thiệu các kết quả nổi bật về phép biến đổi Fourier và dạng biến đổi Fourier phân được quan tâm nhiều và phát triển trong khoảng 3 thập niên trở lại đây.

Bên cạnh đó luận văn có đề cập đến một số ứng dụng của phép biến đổi Fourier phân trong cơ học lượng tử và nguyên lý bất định đối với phép biến đổi Fourier phân.

4. Bố cục của luận văn

Luận văn bao gồm phần Mở đầu, ba chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1 giới thiệu sơ lược về: phép biến đổi Fourier phân; một số tính chất cơ bản của biến đổi Fourier phân; biểu diễn tích phân của biến đổi Fourier phân; phép tính toán tử tổng quát của Namias [1].

Chương 2 trình bày một số ứng dụng của phép biến đổi Fourier phân trong cơ học lượng tử để tìm nghiệm của phương trình Schrödinger cho: dao động điều hòa độc lập thời gian (dừng); dao động điều hòa phụ thuộc thời gian; dao động điều hòa cưỡng bức; các electron tự do trong một từ trường đồng nhất và không đổi; sự phát triển của một gói sóng điện tử trong từ trường đồng nhất và không đổi; các electron tự do trong từ trường đồng nhất và biến thiên theo thời gian của Namias [1].

Chương 3 trình bày nguyên lý bất định cho tín hiệu thực trong miền biến đổi Fourier phân [4].

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và nhiệt tình chỉ bảo của Tiến sĩ Nguyễn Văn Ngọc, Viện Toán học Việt Nam. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin Trường Đại học khoa học, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K4B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2012.

Tác giả

Phạm Ngọc Điền

Chương 1

BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN

Mục đích của chương này là giới thiệu một số nội dung cơ bản nhất về biến đổi Fourier phân. Nội dung chủ yếu dưới đây được hình thành từ tài liệu [1].

1.1 Định nghĩa và tính chất của biến đổi Fourier

1.1.1 Định nghĩa biến đổi Fourier

Để có thể hiểu về biến đổi Fourier và biến đổi Fourier phân (Namias), trước hết ta xét biến đổi Fourier thông thường trong $L^2(\mathbb{R})$. Các kết quả dưới đây có thể thấy trong nhiều tài liệu, thí dụ [1].

Định nghĩa 1.1. *Cặp biến đổi Fourier thuận, ngược thông thường được định nghĩa là*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \qquad k \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Định nghĩa 1.2. *Biến đổi Fourier (1.1) được viết dưới dạng toán tử:*

$$\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{ixx'} dx'. \tag{1.3}$$

Biến đổi Fourier ngược (1.2) tương ứng với toán tử là:

$$\mathcal{F}_{-\frac{\pi}{2}}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-ixx'} dx'. \tag{1.4}$$

1.1.2 Tính chất toán tử của biến đổi Fourier

Toán tử của biến đổi Fourier có một số tính chất cơ bản sau:

Tính chất 1.1. *Các toán tử $\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}$ và $\mathcal{F}_{-\frac{\pi}{2}}$ là các liên hợp phức của nhau và chúng thoả mãn hệ thức $\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}.\mathcal{F}_{-\frac{\pi}{2}} = \mathcal{F}_{-\frac{\pi}{2}}.\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} = 1$.*

Chúng ta lưu ý rằng

$$\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}[f(x)] = g(x), \quad \mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}[g(x)] = f(-x),$$

$$\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}[f(-x)] = g(-x), \quad \mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}[g(-x)] = f(x).$$

Nếu $H_n(x)$ là những đa thức Harmite bậc n thì dạng toán tử của biến đổi Fourier đối với hàm $e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x)$ là:

$$\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}[e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x)] = e^{in\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x). \tag{1.5}$$

Bây giờ chúng ta xét toán tử $\mathcal{F}_\alpha$ được biểu diễn dưới dạng $e^{i\alpha A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, thỏa mãn phương trình giá trị riêng (1.5). Khi đó

$$e^{i\alpha A} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = e^{in\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x). \tag{1.6}$$

Lấy vi phân hai vế của phương trình (1.6) theo α và cho $\alpha = 0$, ta được

$$A e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x) = n e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x). \tag{1.7}$$

Vì $H_n^{"}(x) - 2xH_n^{'}(x) + 2nH_n(x) = 0$, nên chúng ta có

$$A = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}. \tag{1.8}$$

Tính chất 1.2. *Một cách tổng quát, toán tử $\mathcal{F}_\alpha = e^{i\alpha A}$ có biến đổi ngược là $\mathcal{F}_{-\alpha} = e^{-i\alpha A}$. Biến đổi Fourier thông thường tương ứng với $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và ngược lại với $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Giá trị $\alpha = 0$ dẫn đến toán tử đồng nhất, khi $\alpha = \pi$ tương ứng với các toán tử chẵn lẻ.*

Ví dụ 1.1. *Biến đổi Fourier phân bậc $\frac{1}{2}$ khi áp dụng 2 lần ta được biến đổi Fourier thông thường. Biến đổi được mô tả bởi toán tử $\mathcal{F}_{\frac{\pi}{4}}$ có thể gọi là căn bậc hai của biến đổi Fourier thông thường.*

Tính chất 1.3. *Trong trường hợp tổng quát, ta có: $\mathcal{F}_{\alpha+\beta} = \mathcal{F}_\alpha.\mathcal{F}_\beta$.*

Về phương diện lý thuyết, dạng toán tử $\mathcal{F}_\alpha = e^{i\alpha A}$ rất có ích, song bản thân nó không thích hợp với việc rút gọn trực tiếp và đánh giá biến đổi phân đoạn. Ngay cả trong trường hợp biến đổi Fourier thông thường, việc sử dụng toán tử $\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{i\pi A}{2}}$ chưa phải là hiệu quả nhất và cách tối ưu là sử dụng biểu diễn tích phân (1.1). Như vậy, đánh giá về sự biến đổi phân đoạn có thể được hỗ trợ bởi việc biểu diễn tích phân tương ứng.

1.2 Biến đổi Fourier phân Namias

1.2.1 Biến đổi Fourier và đa thức Hermite

Ký hiệu $H_n(x)$ là đa thức Hermite bậc n. Hàm Hermite được chuẩn hoá thành một hệ trực chuẩn trong $L^2(\mathbb{R})$ bởi công thức

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.9}$$

Với $f \in L^2(\mathbb{R})$ ta có

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x), \tag{1.10}$$