ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN VĂN GIANG

BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN HỖN HỢP VỚI TOÁN TỬ NHIỄU KHÔNG ĐƠN ĐIỆU

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60.46.36**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

Mở đầu

Cho X là một không gian Banach thực phản xạ, X^* là không gian liên hợp của X, cả hai có chuẩn đều được kí hiệu là $\|.\|$, $A : X \to X^*$ là toán tử đơn điệu đơn trị và $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là phiếm hàm lồi chính thường nửa liên tục dưới. Bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp *(mixed variational inequality)* được phát biểu như sau (xem [3]): với $f \in X^*$, tìm $x_0 \in X$ sao cho

$$\langle Ax_0 - f, x - x_0\rangle + \varphi(x) - \varphi(x_0) \geq 0, \ \forall x \in X, \tag{0.1}$$

ở đây $\langle x^*, x\rangle$ kí hiệu giá trị phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ tại $x \in X$.

Bất đẳng thức biến phân hỗn hợp (0.1), khi toán tử A không có tính chất đơn điệu đều hoặc đơn điệu mạnh và hàm φ không lồi mạnh, nói chung là một bài toán đặt không chỉnh *(ill-posed)* theo nghĩa nghiệm của nó không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện đầu vào. Do đó việc giải số của bài toán này gặp khó khăn, lý do là một sai số nhỏ trong dữ kiện của bài toán có thể dẫn đến sai số bất kì trong lời giải. Vì thế, người ta phải sử dụng những phương pháp giải ổn định sao cho khi sai số của dữ kiện càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán ban đầu. Một trong những phương pháp được sử dụng rộng rãi và rất có hiệu quả là phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov. Bằng phương pháp này O. A. Liskovets [7] đã xây dựng nghiệm hiệu chỉnh dựa trên việc giải bất đẳng thức biến phân: tìm phần tử $x_\alpha^\tau \in X$ sao cho

$$\begin{aligned}\langle A_h x_\alpha^\tau + \alpha U^s(x_\alpha^\tau - x_*) - f_\delta, x - x_\alpha^\tau\rangle& \\ + \varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x_\alpha^\tau) \geq 0, \ \forall x \in X,&\end{aligned} \tag{0.2}$$

ở đây $(A_h, f_\delta, \varphi_\varepsilon)$ là các xấp xỉ của (A, f, φ), $\tau = (h, \delta, \varepsilon)$, U^s là ánh xạ đối ngẫu tổng quát của X, α là một tham số (gọi là tham số hiệu chỉnh).

Năm 2008 Nguyễn Bường và Nguyễn Thị Thu Thủy [2] đã đưa ra cách chọn giá trị của tham số hiệu chỉnh α và đánh giá tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh x_α^τ của bất đẳng thức biến phân hiệu chỉnh của Liskovets (0.2) với toán tử ngược đơn điệu mạnh. Kết quả tương tự trong trường hợp toán tử nhiễu đơn điệu được nghiên cứu trong [8]. Nếu toán tử nhiễu A_h không đơn điệu thì bất đẳng thức biến phân hiệu chỉnh (0.2) của Liskovets có thể không có nghiệm. Trong trường hợp này, mở rộng kết quả với bất đẳng thức biến phân cổ điển của Liskovets, Nguyễn Thị Thu Thủy [9] đã nghiên cứu bài toán hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân hỗn hợp (0.1): tìm phần tử $x_\alpha^\tau \in X$ sao cho

$$\begin{aligned}\langle A_h x_\alpha^\tau + \alpha U^s(x_\alpha^\tau - x_*) - f_\delta, x - x_\alpha^\tau\rangle + \varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x_\alpha^\tau) \\ \geq -\mu g(\|x_\alpha^\tau\|)\|x - x_\alpha^\tau\|,\ \forall x \in X,\ \mu \geq h,\end{aligned} \tag{0.3}$$

ở đây μ là một số dương đủ bé.

Mục đích của luận văn nhằm trình bày kết quả trong [9] của Nguyễn Thị Thu Thủy về hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân hỗn hợp với toán tử nhiễu không đơn điệu.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 giới thiệu về bất đẳng thức biến phân hỗn hợp trong không gian Banach phản xạ thực X. Một số trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức biến phân hỗn hợp và bài toán thực tế của bất đẳng thức biến phân hỗn hợp được trình bày ở phần cuối của chương.

Trong chương 2 sẽ trình bày phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân hỗn hợp (0.1) với toán tử nhiễu không đơn điệu. Cụ thể là trình bày định lý tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán hiệu chỉnh (0.3), sự hội tụ mạnh của nghiệm hiệu chỉnh đến nghiệm chính xác của bất đẳng thức biến phân (0.1), đồng thời đánh giá tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh khi toán tử A có tính chất ngược đơn điệu mạnh.

Tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, trưởng Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, người đã hướng dẫn, chỉ dạy tận tình để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô công tác tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, trường Đại học Khoa học tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin thuộc Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã truyền thụ kiến thức cho tôi trong suốt quá trình học tập vừa qua.

Tôi cũng xin cảm ơn cơ quan, bạn bè, gia đình đã chia sẻ, giúp đỡ, động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành luận văn này.

Người viết luận văn

Nguyễn Văn Giang

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

H	không gian Hilbert thực
X	không gian Banach thực
X^*	không gian liên hợp của X
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
$\emptyset$	tập rỗng
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\inf\limits_{x \in X} F(x)$	infimum của tập $\{F(x) : x \in X\}$
I	ánh xạ đơn vị
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
$a \sim b$	a tương đương với b
A^*	toán tử liên hợp của toán tử A
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền giá trị của toán tử A
$x^k \to x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới x
$x^k \rightharpoonup x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới x

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân hỗn hợp

1.1. Một số khái niệm và kết quả của giải tích hàm phi tuyến

Cho X là một không gian Banach thực phản xạ, X^* là không gian liên hợp của X, cả hai có chuẩn đều được kí hiệu là $\|.\|$, kí hiệu $\langle x^*, x\rangle$ là giá trị của phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ tại $x \in X$. Các khái niệm và kết quả trong mục này chúng tôi tham khảo trong các tài liệu [1], [3], [6] và [10].

1.1.1. Một số tính chất hình học của không gian

Định nghĩa 1.1. Không gian Banach X được gọi là lồi chặt nếu mặt cầu đơn vị $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ của X là lồi chặt, tức là từ $x, y \in S$ kéo theo $\|x + y\| < 2$ (nói cách khác biên của S không chứa bất kì một đoạn thẳng nào).

Ví dụ 1.1. Không gian $L^p[a, b],\ 1 < p < \infty$, là một không gian lồi chặt.

Định nghĩa 1.2. Không gian Banach X được gọi là lồi đều nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in X$ thỏa mãn $\|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1,\ \|x - y\| = \varepsilon$ thì bất đẳng thức

$$\|x + y\| \le 2(1 - \delta)$$

đúng.

Định nghĩa 1.3. Không gian Banach thực X được gọi là không gian có tính chất Ephimov-Stechkin (hay không gian có tính chất E-S) nếu X phản xạ và trong X sự hội tụ yếu các phần tử $\big(x_n \rightharpoonup x\big)$ và sự hội tụ chuẩn $\big(\|x_n\| \to \|x\|\big)$ luôn kéo theo sự hội tụ mạnh $\big(\|x_n - x\| \to 0\big)$.

Ví dụ 1.2. Không gian Hilbert là không gian có tính chất E-S.

1.1.2. Toán tử đơn điệu

Cho toán tử đơn trị $A : X \to X^*$, như thường lệ ta ký hiệu miền hữu hiệu của A là $D(A)$, miền giá trị của A là $R(A)$ và đồ thị của A là Gra$A$. Theo định nghĩa ta có:

$$D(A) = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\},$$
$$R(A) := \{y \in Y^* : y = Ax,\ x \in D(A)\},$$
$$\text{Gra}A := \big\{(x, y) : y = Ax,\ x \in X\big\}.$$

Định nghĩa 1.4. Toán tử A được gọi là

(i) đơn điệu nếu

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0,\ \forall x, y \in D(A);$$

(ii) đơn điệu ngặt nếu $x \neq y$ thì

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle > 0,\ \forall x, y \in D(A);$$

(iii) đơn điệu đều nếu tồn tại hàm không âm $\delta\,(t)$ không giảm với $t \geq 0$, $\delta(0) = 0$ và

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \delta\big(\|x - y\|\big),\ \forall x, y \in D(A);$$

(iv) đơn điệu mạnh nếu $\exists \tau > 0,\ (\tau = const)$ thỏa mãn

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \tau\|x - y\|^2,\ \forall x, y \in D(A);$$

(v) ngược đơn điệu mạnh nếu tồn tại một hằng số $m_A > 0$ thỏa mãn

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq m_A \parallel Ax - Ay \parallel^2, \ \forall x, y \in D(A).$$

Ví dụ 1.3. Cho toán tử A xác định trên $\mathbb{R}$, $A(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó A là toán tử đơn điệu. Thật vậy, vì với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle = \langle x - y, x - y\rangle = (x - y)^2 \geq 0.$$

Định nghĩa 1.5. Cho X là không gian Banach phản xạ thực, $D \subseteq X$, $A : X \to X^*$. Toán tử A được gọi là:

(i) *hemi*-liên tục tại $x_0 \in D$ nếu $A(x_0 + t_n x) \rightharpoonup Ax_0$ khi $t_n \to 0$ với véc tơ x tùy ý sao cho $x_0 + t_n x \in D$ và $0 \leq t_n \leq t(x_0)$;

(ii) *demi*-liên tục tại $x_0 \in D$ nếu với dãy bất kỳ $\{x_n\} \subset D$ sao cho $x_n \to x_0$ thì kéo theo $Ax_n \rightharpoonup Ax_0$ đúng.

Nhận xét 1.1. Một toán tử đơn điệu và *hemi*-liên tục trên X thì *demi*-liên tục trên X.

Định nghĩa 1.6. Cho $A : X \to Y$ là một toán tử từ không gian Banach X vào không gian Banach Y. Toán tử A được gọi là khả vi Fréchet tại điểm $x \in X$, nếu tồn tại $T \in L(X, Y)$ sao cho

$$A(x + h) = A(x) + Th + o(\|h\|),$$

với mọi h thuộc một lân cận của điểm θ. Nếu tồn tại, thì T được gọi là đạo hàm Fréchet của A tại x, và ta viết $A'(x) = T$.

Định nghĩa 1.7. Ánh xạ $U^s : X \to 2^{X^*}$ được gọi là ánh xạ đối ngẫu tổng quát của X nếu

$$U^s(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|, \|x^*\| = \|x\|^{s-1}\}, \ s \geq 2.$$

Khi $s = 2$ thì U^s thường được là U được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của X.

Tính đơn trị của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc U được cho trong mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.1. (xem [1]) *Giả sử X là một không gian Banach. Khi đó,*

1) *$U(x)$ là tập lồi, $U(\lambda x) = \lambda U(x)$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$;*

2) *U là ánh xạ đơn trị khi và chỉ khi X^* là không gian lồi chặt.*

Nhận xét 1.2.

i) Trong không gian Hilbert H, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc chính là toán tử đơn vị I trong H.

ii) Ánh xạ đối ngẫu là một trong những ví dụ về toán tử đơn điệu, nó tồn tại trong mọi không gian Banach.

Ví dụ 1.4. Với $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ và Ω là một tập đo được của không gian $\mathbb{R}^n$ thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc U có dạng

$$(Ux)(t) = \|x\|^{2-p}|x(t)|^{p-2}x(t),\ t \in \Omega.$$

Định lý 1.1. (xem [1]) *Nếu X^* là không gian Banach lồi chặt thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $U : X \to X^*$ là toán tử đơn điệu, bức và demi-liên tục. Hơn nữa, nếu X là không gian Banach lồi chặt thì U là toán tử đơn điệu chặt.*

Định nghĩa 1.8. Toán tử $A : X \to X^*$ có tính chất Γ nếu từ sự hội tụ yếu của dãy x_n ($x_n \rightharpoonup x$) và $\langle Ax_n - Ax, x_n - x\rangle \to 0$ suy ra sự hội tụ mạnh ($x_n \to x$) khi $n \to \infty$.

1.1.3. Phiếm hàm lồi

Cho $D \subset X$ là một tập lồi khác rỗng, $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Miền hữu hiệu của hàm φ được định nghĩa bởi

$$\mathrm{dom}\varphi := \{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}.$$