ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VĂN THƯ

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA ĐA THỨC ĐỐI XỨNG VÀ ỨNG DỤNG TRONG ĐẠI SỐ

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60. 46. 40.

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN VĂN MINH

THÁI NGUYÊN – 2012

Mục lục

Mở đầu

Các bài toán đại số luôn chiếm một vị trí quan trọng đối với toán phổ thông, cũng là lĩnh vực mà các nhà nghiên cứu sáng tạo ra rất đầy đủ và hoàn thiện. Tính đối xứng trong đại số là một trong những phần quan trọng của đại số sơ cấp, cũng là bài toán quen thuộc trong các tài liệu liên quan đến đại số sơ cấp, các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế.
Trong quá trình giải nhiều bài toán đại số hoặc ở dạng trực tiếp hoặc ở dạng gián tiếp mới nhận ra đó là bài toán liên quan đến đa thức đối xứng, nếu giải mỗi bài toán này một cách đơn lẻ sẽ gặp không ít khó khăn và tính hiệu quả không cao khi giải các bài toán cùng loại. Việc nắm bắt được đầy đủ khái niệm và các tính chất cơ bản của đa thức đối xứng, thông qua đó áp dụng giải một số bài toán liên quan đến đa thức đối xứng là vấn đề được nhiều người quan tâm.

Luận văn này giới thiệu các khái niệm, tính chất của đa thức đối xứng và các ứng dụng cơ bản để giải các bài toán đại số thường gặp trong chương trình toán sơ cấp. Luận văn "Một số tính chất của đa thức đối xứng và ứng dụng trong đại số" gồm có phần mở đầu, ba chương nội dung, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1. Các khái niện cơ bản về đa thức đối xứng.
Trong chương này tác giả trình bày các khái niệm, tính chất của đa thức đối xứng hai biến, ba biến. Một đóng góp nhỏ có ý nghĩa trong chương này là Hệ quả 1.1 của công thức Newton. Công thức này thường được sử dụng trong các bài toán tính giá trị biểu thức.

Chương 2. Ứng dụng tính chất của đa thức đối xứng để giải một số bài toán đại số.
Chương này tác giả trình bày các ứng dụng của đa thức đối xứng bằng các ví dụ minh họa cụ thể. Các ứng dụng này rất phổ biến trong các tài liệu về đại số trong chương trình toán phổ thông.

Chương 3. Đa thức đối xứng n biến và ứng dụng.
Chương này tác giả trình bày các kiến thức của đa thức đối xứng n biến và một số ứng dụng phổ biến thường gặp.
Luận văn nghiên cứu một phần rất nhỏ của đại số và đã thu được một số kết quả nhất định. Tuy nhiên, luận văn chắc chắn còn nhiều thiếu xót, nên rất mong được sự góp ý của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp và độc giả quan tâm đến nội dung luận văn để luận văn của tác giả được hoàn thiện hơn.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Văn Minh. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới sự quan tâm của thầy, tới các thầy cô trong Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo và Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học. Đồng thời tác giả xin cảm ơn tới Sở GD - ĐT tỉnh Yên Bái, Ban Giám hiệu, các bạn đồng nghiệp tại trường THPT Hoàng Văn Thụ huyện Lục Yên - Yên Bái và gia đình đã tạo điều kiện cho tác giả học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 06 năm 2012.

Tác giả

Phạm Văn Thư

Chương 1

Khái niệm cơ bản về đa thức đối xứng

1.1 Đa thức đối xứng hai biến

1.1.1 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1 (Theo [2]). *Một đơn thức f(x,y) của các biến độc lập x, y (trường hợp chung nhất có thể là các số phức) được hiểu là hàm số có dạng*

$$f(x,y) = a_{kl}x^k y^l,$$

trong đó $a_{kl} \neq 0$ là một số (hằng số), k, l là những số nguyên không âm. Số a_{kl} được gọi là hệ số, còn k+l được gọi là bậc của đơn thức f(x,y) và được kí hiệu là

$$deg[f(x,y)] = deg[ax^k y^l] = k + l.$$

Các số k, l tương ứng được gọi là bậc của đơn thức đối với các biến x, y. Như vậy, bậc của đơn thức hai biến bằng tổng các bậc của các đơn thức theo từng biến.

Chẳng hạn: $3x^4y^2$ và x^2y là các đơn thức theo x, y với bậc tương ứng bằng 6 và 3.

Định nghĩa 1.2 (Theo [2]). *Hai đơn thức của các biến x, y được gọi là đồng dạng (tương tự), nếu chúng chỉ có hệ số khác nhau. Như vậy, hai đơn thức được gọi là đồng dạng, nếu chúng có dạng: $Ax^ky^l, Bx^ky^l (A \neq B)$.*

Định nghĩa 1.3 (Theo [2]). *Giả sử Ax^ky^l và Bx^my^n là hai đơn thức của các biến x, y. Ta nói rằng đơn thức Ax^ky^l trội hơn đơn thức Bx^my^n theo thứ tự của các biến x, y, nếu $k > m$, hoặc $k = m$ và $l > n$.*

Chẳng hạn: Đơn thức $3x^4y^2$ trội hơn đơn thức $3x^2y^7$, còn đơn thức x^4y^5 trội hơn đơn thức x^4y^3.

Định nghĩa 1.4 (Theo [2]). *Một hàm số P(x,y) được gọi là một đa thức theo các biến số x, y, nếu nó có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hữu hạn các đơn thức. Như vậy, đa thức P(x,y) theo các biến số x, y là hàm số có dạng*

$$P(x,y) = \sum_{k+l<m} a_{kl}x^k y^l.$$

Bậc lớn nhất của các đơn thức trong đa thức được gọi là bậc của đa thức.

Định nghĩa 1.5 (Theo [2]). *Đa thức P(x,y) được gọi là đối xứng của hai biến x, y, nếu nó không thay đổi khi đổi chỗ của x và y, nghĩa là*

$$P(x,y) = P(y,x)$$

Chẳng hạn:

$$P(x,y) = x^3 - xy + y^3, Q(x,y) = x^2y + xy^2$$

là các đa thức đối xứng của các biến x, y.

Định nghĩa 1.6 (Theo [2]). *Các đa thức*

$$\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy.$$

được gọi là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến x, y.

Định nghĩa 1.7 (Theo [2]). *Đa thức đối xứng P(x,y) được gọi là thuần nhất bậc m, nếu:*

$$P(tx,ty) = t^m P(x,y), \forall t \neq 0$$

1.1.2 Tổng lũy thừa và công thức Waring

Định nghĩa 1.8 (Theo [2]). *Các đa thức $s_k = x^k + y^k (k = 1, 2, ...)$ được gọi là tổng lũy thừa bậc k của các biến x, y.*

Định lý 1.1 (Theo [2]). *Mỗi tổng lũy thừa $s_m = x^m + y^m$ có thể biểu diễn được dưới dạng một đa thức bậc m của σ_1 và σ_2*

Chứng minh. Ta có

$$\sigma_1 s_{k-1} = (x+y)(x^{k-1} + y^{k-1}) = x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = s_k + \sigma_2 s_{k-2}.$$

Như vậy

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}. \tag{1.1}$$

Công thức (1.1) được gọi là công thức Newton, nó cho phép tính s_k theo s_{k-1} và s_{k-2}.
Với m=1, m=2, Định lý 1.1 đúng vì

$$s_1 = x + y = \sigma_1,$$
$$s_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Giả sử định lý đã đúng cho m < k. Khi đó s_{k-1} và s_{k-2} lần lượt là các đa thức bậc k-1, k-2 của σ_1 và σ_2. Theo công thức (1.1) ta suy ra s_k là đa thức bậc k của σ_1 và σ_2. Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh. □

Hệ quả 1.1. *Với $m > n$, ta có*

$$s_{m+n} = s_m.s_n - \sigma_2^n.s_{m-n}. \tag{1.2}$$

Thật vậy,
$s_{m+n} = x^{m+n} + y^{m+n} = (x^m + y^m)(x^n + y^n) - x^n y^n (x^{m-n} + y^{m-n}) = s_m.s_n - \sigma_2^n.s_{m-n}$

Sử dụng công thức (1.1) và các biểu thức của s_1, s_2 ở chứng minh trên, ta nhận được các biểu thức sau

$s_1 = x + y = \sigma_1,$
$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$
$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$
$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2,$
$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2.$

Việc tính các tổng lũy thừa s_k theo công thức lặp (1.1) không được thuận tiện vì phải biết trước các tổng s_k và s_{k-1}. Đôi khi ta cần có biểu thức s_k chỉ phụ thuộc vào σ_1 và σ_2. Công thức tương ứng được tìm ra năm 1779 bởi nhà toán học người Anh E.Waring.

Định lý 1.2 (Công thức Waring (Theo [2]))**.** *Tổng lũy thừa s_k được biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở σ_1 và σ_2 theo công thức*

$$\frac{1}{k} s_k = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^m (k-m-1)!}{m!\,(k-2m)!} \sigma_1^{k-2m} \sigma_2^m, \tag{1.3}$$

trong đó [k/2] kí hiệu là phần nguyên của k/2.

Chứng minh. Ta chứng minh công thức (1.3) bằng phương pháp quy nạp. Với k=1, k=2 công thức tương ứng có dạng

$$s_1 = \sigma_1,\ \frac{1}{2}s_2 = \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \sigma_2.$$

Như vậy, với k=1, k=2 công thức (1.3) đúng. Giả sử công thức Waring đã đúng cho $s_1, s_2, ..., s_{k-1}$. Để chứng minh công thức đó đúng cho s_k ta sử dụng công thức (1.1). Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}s_k &= \frac{1}{k}\left[\sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}\right] = \\
&= \frac{k-1}{k}\sigma_1.\sum_{m=0}\frac{(-1)^m(k-m-2)!}{m!\,(k-2m-1)!}\sigma_1^{k-2m-1}\sigma_2^m - \\
&-\frac{k-1}{k}\sigma_2.\sum_{n}\frac{(-1)^n(k-n-3)!}{n!\,(k-2n-2)!}\sigma_1^{k-2n-2}\sigma_2^n = \\
&= \frac{1}{k}\sum_{m}\frac{(-1)^m(k-m-2)!\,(k-1)}{m!\,(k-2m-1)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m - \\
&-\frac{1}{k}\sum_{n}\frac{(-1)^n(k-n-3)!\,(k-2)}{n!\,(k-2n-2)!}\sigma_1^{k-2n-2}\sigma_2^{n+1}
\end{aligned}$$

Trong tổng thứ hai thay n+1 bởi m. Khi đó hai tổng có thể kết hợp thành một như sau:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}s_k &= \frac{1}{k}\sum\frac{(-1)^m(k-m-2)!\,(k-1)}{m!\,(k-2m-1)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m - \\
&-\frac{1}{k}\sum_{m}\frac{(-1)^{m-1}(k-m-2)!\,(k-2)}{(m-1)!\,(k-2m)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m =
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{k}\sum_{m}(-1)^m(k-m-2)!\left[\frac{k-1}{m!\,(k-2m-1)!} + \frac{k-2}{(m-1)!\,(k-2m)!}\right]\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m.$$

Sử dụng công thức

$$\frac{1}{(m-1)!} = \frac{m}{m!}, \frac{1}{(k-2m-1)!} = \frac{k-2m}{(k-2m)!},$$

ta có

$$\frac{(k-1)(k-2m)}{m!(k-2m)!} + \frac{(k-2)m}{m!(k-2m)!} = \frac{k(k-m-1)}{m!(k-2m)!}.$$

Cuối cùng, vì

$$(k-m-1).(k-m-2)! = (k-m-1)!$$

nên ta có công thức cần phải chứng minh:

$$\frac{1}{k}s_k = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^m (k-m-1)!}{m!(k-2m)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m,$$

□

Công thức Waring cho biểu thức của $s_n = x^n + y^n$ theo $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$ sau đây
$s_1 = \sigma_1$; $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$; $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$; $s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$; $s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$; $s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$; $s_7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3$; $s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4$; $s_9 = \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^2\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4$; $s_{10} = \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5$; ....

1.1.3 Các định lý về đa thức đối xứng hai biến

Định lý 1.3 (Theo [2]). *Mọi đa thức đối xứng P(x,y) của các biến x, y đều có thể biểu diễn được dưới dạng đa thức $p(\sigma_1, \sigma_2)$ theo các biến $\sigma_1 = x + y$ và $\sigma_2 = xy$, nghĩa là*

$$P(x, y) = p(\sigma_1, \sigma_2) \tag{1.4}$$

Chứng minh. Trước hết ta xét trường hợp đơn thức, trong đó lũy thừa của x và y cùng bậc, nghĩa là đơn thức dạng ax^ky^k. Hiển nhiên là

$$ax^ky^k = a(xy)^k = a\sigma_2^k.$$

Tiếp theo, xét đơn thức dạng $bx^ky^l (k \neq l)$. Vì đa thức là đối xứng, nên có số hạng dạng bx^ly^k. Để xác định, ta giả sử k < l và xét tổng hai đơn thức trên

$$b(x^ky^l + x^ly^k) = bx^ky^k(x^{l-k} + y^{l-k}) = b\sigma_2^k s_{l-k}.$$

Theo công thức Waring s_{l-k} là một đa thức của các biến σ_1, σ_2, nên nhị thức nói trên là một đa thức của σ_1, σ_2.
Vì mọi đa thức đối xứng là tổng của các số hạng dạng ax^ky^k và $b(x^ky^l + x^ly^k)$, nên mọi đa thức đối xứng đều biểu diễn được ở dạng đa thức theo các biến σ_1 và σ_2. □