ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

Đặng Thị Hồng Dương

PHƯƠNG TRÌNH VỚI TOÁN TỬ d ACCRETIVE

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

Đặng Thị Hồng Dương

PHƯƠNG TRÌNH VỚI TOÁN TỬ d ACCRETIVE

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN - 2012

Lời nói đầu

Cho X là không gian Banach thực phản xạ và lồi chặt cùng với không gian đối ngẫu X^* của X, cả hai có chuẩn đều được kí hiệu là $\|.\|$. Ký hiệu giá trị phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ tại $x \in X$ là $\langle x^*, x\rangle$.

Toán tử $A : X \to 2^X$ được gọi là toán tử d-accretive nếu

$$\langle Jx_1 - Jx_2, y_1 - y_2\rangle \geq 0$$

với mọi $x_1, x_2 \in D(A)$, $y_1 \in Ax_1,\ y_2 \in Ax_2$, ở đây $D(A)$ là kí hiệu miền xác định của toán tử A.

Chúng ta xét phương trình toán tử

$$Ax = f.$$

Phương pháp hiệu chỉnh toán tử được Lavrent'ev [6] đưa ra đầu tiên cho phương trình toán tử tuyến tính trong không gian Hilbert. Những nghiên cứu sâu sắc cho bài toán này được công bố trong [3]-[5]. Trong không gian Banach X, nhưng không phải không gian Hilbert, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J của X là không tuyến tính. Khi đó, không thể áp dụng phương pháp hiệu chỉnh toán tử trong [3]-[6] cho phương trình toán tử $Ax = f$ trong không gian Banach. Khi đó đòi hỏi những nghiên cứu mới về phương pháp hiệu chỉnh toán tử cho phương trình toán tử phi tuyến.

Mục tiêu của luận văn là tìm hiểu và trình bày một số kết quả cơ bản về phương trình toán tử $Ax = f$ với toán tử d-accretive trong không gian Banach. Các vấn đề đề cập trong luận văn được tập hợp từ tài liệu [2], trong các mục về: Toán tử accretive và toán tử d-accretive; Phương trình toán tử accretive và phương trình toán tử d-accretive; Hiệu chỉnh phương trình toán tử với toán tử d-accretive.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1 giới thiệu một số kiến thức cơ bản về toán tử accretive và toán tử d-accretive và một số tính chất hình học của không gian.

Chương 2 sẽ trình bày phương trình toán tử accretive, phương trình toán tử d-accretive và phương pháp hiệu chỉnh phương trình toán tử d-accretive.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của Tiến sỹ Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của cô trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, thông qua các bài giảng, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ của các giáo sư công tác tại trường Đại học Khoa học tự nhiên - Đại học Quốc Gia Hà Nội, Viện Toán học, Viện Công nghệ thông tin - Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam và Đại học Thái Nguyên. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã động viên tôi vượt qua những khó khăn trong cuộc sống để tôi có điều kiện tốt nhất khi học tập nghiên cứu.

Do điều kiện thời gian và trình độ còn hạn chế, chắc chắn bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy, tôi rất mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn. Tôi hy vọng được tiếp tục nghiên cứu đề tài trên trong thời gian tới.
Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, năm 2012
Tác giả

Đặng Thị Hồng Dương

Bảng ký hiệu

H	không gian Hilbert thực
X	không gian Banach thực
X^*	không gian liên hợp của X
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
$\emptyset$	tập rỗng
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\inf_{x\in X} F(x)$	infimum của tập $\{F(x) : x \in X\}$
I	ánh xạ đơn vị
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
$a \sim b$	a tương đương với b
A^*	toán tử liên hợp của toán tử A
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền giá trị của toán tử A
$x^k \to x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới x
$x^k \rightharpoonup x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới x

Mục lục

Chương 1

Toán tử accretive và d-accretive

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về toán tử accretive và d-accretive. Các khái niệm và kết quả của chương này được tham khảo trong tài liệu [1], [2].

1.1 Toán tử accretive

Cho X là không gian Banach thực phản xạ và lồi chặt cùng với không gian đối ngẫu X^* của X, cả hai có chuẩn đều được kí hiệu là $\|.\|$. Ký hiệu giá trị phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ tại $x \in X$ là $\langle x^*, x\rangle$.

Định nghĩa 1.1.1. Toán tử $A : X \to X^*$ được gọi là

i) *hemi*-liên tục (hemicontinuous) trên X nếu $A(x + ty) \rightharpoonup Ax$, khi $t \to 0$, $\forall x, y \in X$.

ii) *demi*-liên tục (demicontinuous) trên X nếu từ $x_n \to x$ suy ra $Ax_n \rightharpoonup Ax,\ n \to \infty$.

iii) liên tục yếu theo dãy (weak-to-weak continuous) nếu với bất kỳ dãy $x_n \subset X$, $x_n \rightharpoonup x_0$ thì $Ax_n \rightharpoonup Ax_0$.

Định nghĩa 1.1.2. Toán tử $J : X \to 2^{X^*}$ được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của X nếu

$$\langle J(x), x\rangle = \|J(x)\|\|x\| = \|x\|^2, \ \forall x \in X.$$

Mệnh đề 1.1.3. *Giả sử X là không gian Banach. Khi đó,*

i) $J(x)$ là tập lồi, $J(\lambda x) = \lambda J(x)$ với mọi $\lambda > 0$;

ii) J là toán tử đơn trị khi và chỉ khi X^* là không gian lồi chặt. Trong trường hợp X là không gian Hilbert thì $J \equiv I$ (trong đó I là toán tử đơn vị trong X).

Định lý 1.1.4. *Nếu X^* là không gian Banach lồi chặt thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J : X \to X^*$ là toán tử đơn điệu, bức và demi-liên tục. Hơn nữa, nếu X là không gian Banach lồi chặt thì J là toán tử đơn điệu chặt.*

Định nghĩa 1.1.5. Toán tử $A : X \to 2^X$ gọi là toán tử accretive nếu

$$\langle J(x_1 - x_2), y_1 - y_2\rangle \geq 0 \tag{1.1}$$

với mọi $x_1, x_2 \in D(A),\ y_1 \in Ax_1,\ y_2 \in Ax_2$, ở đây $D(A)$ là kí hiệu miền xác định của toán tử A.

Nếu toán tử A khả vi Gâteaux thì ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1.1.6. Toán tử khả vi Gâteaux $A : X \to X$ là toán tử accretive nếu

$$\langle Jh, A'(x)h\rangle \geq 0, \ \forall x, \ h \in X.$$

Sau đây là một định nghĩa khác của toán tử accretive.

Định nghĩa 1.1.7. Toán tử $A : X \to 2^X$ được gọi là toán tử accretive nếu

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|, \ \lambda > 0, \tag{1.2}$$

với mọi $x_1, x_2 \in D(A),\ y_1 \in Ax_1,\ y_2 \in Ax_2$.

Định lý 1.1.8. *Định nghĩa* 1.1.5 *và Định nghĩa* 1.1.7 *là tương đương.*

Chứng minh: Thật vậy, giả sử (1.1) thỏa mãn, khi đó bất đẳng thức

$$\langle J(x_1 - x_2), x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\rangle \geq \|x_1 - x_2\|^2,\ \lambda > 0,$$

có giá trị và từ đó suy ra (1.2).

Hơn nữa, ta biết rằng nếu X^* là không gian lồi chặt thì X là không gian trơn và $Jx = 2^{-1}\text{grad}\|x\|^2$. Từ tính lồi của hàm $\|x\|^2$ ta có bất đẳng thức

$$\|x_1 - x_2\|^2 \geq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 - 2\lambda\langle J(x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)), y_1 - y_2\rangle.$$

Nếu (1.2) thỏa mãn thì

$$\langle J(x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)), y_1 - y_2\rangle \geq 0.$$

Cho $\lambda \to 0$ và sử dụng tính chất *hemi*-liên tục của J ta nhận được (1.1)

□

Sau đây là một số tính chất của toán tử accretive.

Định nghĩa 1.1.9. Toán tử accretive $A : X \to 2^X$ là toán tử bức nếu

$$\langle Jx, y\rangle \geq c(\|x\|)\|x\|,\ \forall y \in Ax,$$

ở đây $c(t) \to +\infty$ khi $t \to +\infty$.

Định nghĩa 1.1.10. Toán tử $A : X \to 2^X$ được gọi là bị chặn địa phương tại điểm $x \in D(A)$ nếu tồn tại một lân cận M của điểm đó sao cho tập hợp

$$A(M) = \{y : y \in Ax,\ x \in M \cap D(A)\}$$

là bị chặn trong X.

Định lý 1.1.11. *Cho* $A : X \to 2^X$ *là toán tử accretive, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc* $J : X \to X^*$ *và* $J^* : X^* \to X$ *liên tục trong* X *và* X^* *tương ứng. Khi đó toán tử* A *bị chặn địa phương tại mọi điểm* $x \in intD(A)$.