ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LƯƠNG THỊ DUNG

NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN ĐỐI VỚI BÀI TOÁN BIÊN THỨ NHẤT CỦA PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60 46 36**

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS. HÀ TIẾN NGOẠN

THÁI NGUYÊN, 2012

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa Học, Đại học Thái Nguyên.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, thông qua các bài giảng, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ, chỉ bảo tận tình và những ý kiến đóng góp quý báu của các thầy cô giáo trong trường Đại học Khoa Học, Đại Học Thái Nguyên, các giáo sư của Viện Toán học. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng biết hơn đến các thầy cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám Hiệu, phòng Đào tạo khoa học và Quan hệ Quốc tế, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sau sắc tới $PGS.TS$ Hà Tiến Ngoạn, thầy đã rất tận tình hướng dẫn, chỉ bảo tác giả trong suốt thời gian tác giả thực hiện luận văn và trực tiếp hướng dẫn tác giả hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè đã cảm thông, luôn theo sát động viên, ủng hộ và chia sẻ những khó khăn trong suốt thời gian tác giả học tập và làm luận văn, giúp

tác giả có điều kiện tốt nhất trong quá trình học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 7 năm 2012

Tác giả

Lương Thị Dung

Mục lục

Mở đầu

Nghiệm suy rộng của bài toán biên Drichlet của phương trình elliptic cấp 2 trong miền Ω được định nghĩa trong không gian $H^{1,2}(\Omega)$ là hàm số gồm những hàm số mà các đạo hàm riêng đến cấp 1 là bình phương khả tích trong Ω. Người ta đã chứng minh rằng nghiệm suy rộng này có liên quan chặt chẽ đến cực tiểu hóa của phiếm hàm năng lượng tương ứng.

Luận văn trình bày nguyên lý biến phân đối với bài toán biên thứ nhất cho phương trình elliptic tuyến tính cấp 2. Các vấn đề được đề cập trong luận văn được tập hợp từ [1].

Ngoài các phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, Luận văn gồm có hai chương.

Phần đầu chương 1 Luận văn trình bày một số kiến thức chuẩn bị như không gian $H^{1,2}(\Omega)$ và $H_0^{1,2}(\Omega)$ các phiếm hàm trong các không gian này. Phần tiếp theo, Luận văn trình bày sự tồn tại và duy nhất phần tử cực tiểu hóa của phiếm hàm. Phần cuối của chương 1, Luận văn trình bày điều kiện cần và đủ để một phần tử là cực tiểu hóa.

Trong chương 2, Luận văn trình bày nguyên lý biến phân đối với bài toán biên Dirichlet cho phương trình elliptic cấp 2. Nguyên lý Dirichlet được phát biểu như sau: Hàm $u(x) \in H^{1,2}(\Omega), u(x) = g(x)$ trên $\partial\Omega$ là nghiệm suy rộng của bài toán Dirichlet khi và chỉ khi nó là cực tiểu hóa của phiếm hàm năng lượng tương ứng.

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	Tập các số thực.
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclidean n chiều.
$\mathbb{R}^d$	Không gian Euclidean d chiều.
W^d	Thể tích của hình cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^d$.
$W^{\frac{1}{2}}(\Omega)$	Không gian sinh ra bởi tích vô hướng.

Chương 1

Phép tính biến phân

1.1 Một số không gian hàm

1.1.1 Không gian $L^p(\Omega)$

Cho $\Omega \in \mathbb{R}^n$ là một miền trong $\mathbb{R}^n$. Không gian $L^p(\Omega), 1 \leq p < +\infty$ là tập hợp tất cả các hàm $f(x)$ đo được trong Ω và $|f(x)|^p$ khả tích trong Ω, tức là

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty.$$

Trong $L^p(\Omega)$ ta đưa vào chuẩn

$$||f(x)||_{L^p(\Omega)} = \left[\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Khi đó $L^p(\Omega)$ là không gian Banach.

Không gian $L^2(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng sau

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{1.2}$$

Giả sử các số p và q thỏa mãn các điều kiện

$$p \geq 1, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Khi đó ta có bất đẳng thức Holder sau đây

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_{L^p(\Omega)}||g||_{L^q(\Omega)}. \tag{1.3}$$

1.1.2 Không gian $H^{1,2}(\Omega)$

Không gian $C^1(\bar{\Omega})$ là không gian tiền Hilbert với tích vô hướng và chuẩn sau

$$< u, v >_{C^1(\bar{\Omega})} = \int_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^{n} D_j(u)D_j(v) + u(x)v(x) \right] dx, \tag{1.4}$$

$$||u||^2_{C^1(\bar{\Omega})} = \int_{\Omega} \left[u^2 + \sum_{j=1}^{n} (D_j u)^2 \right] dx. \tag{1.5}$$

Trong đó $D_j u = \dfrac{\partial u}{\partial x^j}$.

Ta kí hiệu $H^{1,2}(\Omega)$ là bao đóng của $C^1(\bar{\Omega})$ theo chuẩn (1.5).

1.1.3 Không gian $H_0^{1,2}(\Omega)$

Không gian $H_0^{1,2}(\Omega)$ là không gian con của không gian $H^{1,2}(\Omega)$

$$H_0^{1,2}(\Omega) = \{u(x) \in H^{1,2}(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Ta có thể định nghĩa $H_0^{1,2}(\Omega)$ là bao đóng của $C_0^{\infty}(\Omega)$ đối với chuẩn (1.5), trong đó $C_0^{\infty}(\Omega)$ là không gian tất cả các hàm số khả vi vô hạn và có giá compact trong Ω.