ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Phan Thị Vân Huyền

PHƯƠNG TRÌNH SCHRODINGER PHI TUYẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Phan Thị Vân Huyền

PHƯƠNG TRÌNH SCHRODINGER PHI TUYẾN

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số : 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS. TSKH. NGUYỄN MINH TRÍ

THÁI NGUYÊN – 2009

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Phương trình Schrodinger là một trong những phương trình cơ bản nhất trong lý thuyết cơ học lượng tử. Từ khi xuất hiện phương trình này đã có một số lớn các công trình nghiên cứu các tính chất của nó. Trước đây phần lớn các nghiên cứu tập trung vào phương trình Schrodinger tuyến tính. Gần đây một số các chuyên gia như T. Kato, T. Tao, C. Kening, … đã tập trung vào nghiên cứu :Phương trình Schrodinger phi tuyến. Mục tiêu của luận văn này là giới thiệu công trình của T. Kato, một trong những công trình quan trọng trong hướng nghiên cứu này.

Nội dung luận văn được chia thành ba chương

Chương 1 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ, bao gồm bất đẳng thức Holder, không gian L^p, không gian Sobolev và một số ký hiệu hình học được sử dụng trong luận văn. Ngoài ra phần mở đầu còn trình bày về một số kết quả đã có của phương trình phi tuyến Schrodinger dựa theo các tài liệu [11, 12, 14].

Chương 2 ĐỊNH LÝ DUY NHẤT, bao gồm định lý duy nhất (phát biểu và chứng minh định lý), một số chú ý và Hệ quả của nó về tính đặt chỉnh không điều kiện.

Chương 3 SỰ TỒN TẠI ĐỊA PHƯƠNG CỦA H^S – NGHIỆM. H^S – NGHIỆM TOÀN CỤC VỚI ĐIỀU KIỆN BAN ĐẦU NHỎ, bao gồm định lý về sự tồn tại của H^s – nghiệm, với một vài sự hạn chế khi $s \geq 0$, nếu $m \geq 7$ và $F(\xi)$ không là đa thức của ξ và $\bar{\xi}$. Thêm vào độ trơn của F, giả thiết chính ở đây, là $k \leq 1 + \dfrac{4}{m-2s}$ nếu $s < \dfrac{m}{2}$, $k < \infty$ nếu $s = \dfrac{m}{2}$ và $k = \infty$ (không cần giả thiết) nếu s > $\frac{m}{2}$. H^s – nghiệm đã được nghiên cứu chi tiết bởi Cazenave – Weissler [3], ở đây, không gian loại Besov đã được sử dụng như những không gian phụ trợ. Ta sử dụng các không gian loại Lebesgue để thay thế, mà sự xuất hiện của nó thì thích hợp hơn cho vấn đề này. Khi đó chúng ta thu được những kết quả sau sự đánh giá cho khoảng T* của H^s – nghiệm u chỉ phụ thuộc vào $\|\Lambda^\sigma u(0)\|_2$ (trong đó, $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$) với giá trị nhất định nào đó của σ < s, không phụ thuộc vào $\|u(0)\|_{H^s}$. Những đánh giá này dẫn tới một cách tự nhiên định lý về độ trơn. Ngoài ra định lý tồn tại tổng :Quát đã được chứng minh cho H^s – nghiệm toàn cục với điều kiện ban đầu nhỏ, dưới điều kiện thêm vào chính là F(ξ) = O ($|\xi|^{1+4/m}$) với ξ nhỏ; F(ξ) không cần phải là thuần nhất hoặc là lũy thừa giới hạn. Ở đây, lặp lại tính nhỏ của $\|u(0)\|_{H^\sigma}$ với σ < s là đủ trong hầu hết các trường hợp. Nếu F là một đa thức, thì khoảng biến thiên chấp nhận được của σ được mở rộng.

Luận văn được thực hiện với sự hướng dẫn nhiệt tình và đầy trách nhiệm của PGS.TS. Nguyễn Minh Trí. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, các thầy trong phòng Phương trình Vi phân của Viện Toán học đã tận tình giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và viết đề tài này.

Chương 1.

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Bất đẳng thức Holder

Cho một không gian E và một độ đo μ *trên một* $\sigma -$ *đại số* Φ *các tập con của E. Nếu f(x), g(x) là những hàm số đo được xác định trên E, và p, q là hai số thực sao cho 1 < p <* ∞ *và* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *thì*

(1.1.1) $$\int_E |fg|\,d\mu \le \left(\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E |g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Để chứng minh định lý trước hết ta có Bổ đề sau

Bổ đề. *Cho a, b không âm và p, q là là hai số thực sao cho 1 < p <* ∞ *và* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *thì ta có*

(1.1.2) $$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Thật Vậy

Xét hàm $\varphi(t)=\frac{t}{p}+\frac{1}{q}-t^{\frac{1}{p}}$ $(t \ge 0)$, ta thấy φ(1) = 0 và $\varphi'(t)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}$ dương với $t > 1$, âm với $t < 1$, vậy $\varphi(t)$ đạt cực tiểu tại t = 1.

Do vậy, với mọi $t \geq 0$ ta có $\frac{t}{p} + \frac{1}{q} - t^{\frac{1}{p}} \geq \varphi(1) = 0$.

Đặc biệt t = $a^p.b^{-p} \geq 0$ (có thể giả thiết b > 0 vì nếu b = 0 thì (1.1.2) hiển nhiên đúng) ta có $\frac{a^p.b^{-p}}{p} + \frac{1}{q} - ab^{\frac{p}{q}} \geq 0$ hay $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \geq 0$ đó chính là bất đẳng thức (1.1.2). ■

Chứng minh bất đẳng thức (1.1.1).

Áp dụng bất đẳng thức (1.1.2) cho $a = \frac{|f|}{\left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, b = \frac{|g|}{\left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$, ta được

$$\frac{|fg|}{\left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|f|^p}{p\left(\int |f|^p\right)} + \frac{|g|^q}{q\left(\int |g|^q\right)}.$$

Lấy tích phân hai vế ta có

$$\frac{\int |fg|}{\left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\int |f|^p}{p\left(\int |f|^p\right)} + \frac{\int |g|^q}{q\left(\int |g|^q\right)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

từ đó suy ra bất đẳng thức (1.1.1). ■

1.2. Không gian L^p

1.2.1. Định nghĩa.

Cho một không gian E và một độ đo μ trên một $\sigma -$ đại số Φ các tập con của E. Họ tất cả các hàm số f(x) có lũy thừa bậc p ($1 \leq p \leq \infty$) của mođun khả tích trên E, tức là sao cho $\int_E |f|^p d\mu < \infty$ được gọi là không gian $L^p(E, \mu)$.

Khi E là một tập đo được Lebesgue trong $\mathbb{R}^k$, và μ là độ đo Lebesgue, thì ta viết là $L^p(E)$.

Nếu $E = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$, và μ là độ đo Lebesgue thì ta viết $L^p[a, b]$ hoặc $L^p_{[a,\, b]}$ và nếu E = [0, 1] thì ta viết đơn giản là L^p.

Ta có *Tập hợp $L^p(E, \mu)$, trong đó, ta không phân biệt các hàm tương đương nhau (nghĩa là bằng nhau hầu khắp nơi), là một không gian vectơ định chuẩn.* Với các phép toán thông thường về nhân hàm số với số và cộng hàm số, và với chuẩn là

$$\| f \| = \left(\int_E | f |^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.2.2. Một số ký hiệu

(i) $L^r(L^q)$ là $L^r((0, T); L^q(\mathbb{R}^m))$, ở đây, $1 \le q, r \le \infty$ và $0 < T < \infty$, với chuẩn là

$$\| u(x,t) \|_{L^r(L^q)} = \left(\int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^m} |u(x,t)|^q \, dx \right|^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_0^T \left| \| u(x,t) \|_{L^q(\mathbb{R}^m)} \right|^r dt \right)^{\frac{1}{r}}.$$

(ii) $L^\infty(L^\infty)$ sẽ được hiểu như là $L^\infty(\Omega_T)$, ở đây, $\Omega_T = (0, T) \times \mathbb{R}^m$, với chuẩn là

$$\| u(x,t) \|_{L^\infty(L^\infty)} = \operatorname{ess} \sup_{(0,\,T) \times \mathbb{R}^m} | u(x,t) |.$$

(iii) $a \wedge b$ và $a \vee b$ lần lượt là min{a, b} và max{a, b}.

(iv) Để làm đơn giản các chứng minh trong các chương sau ta sử dụng các ký hiệu hình học giới thiệu trong [12] và vài nơi khác.

Ký hiệu

P = (x, y); $0 \le x, y \le 1$ là một điểm trong hình vuông đơn vị $\square = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Ta viết x = x(P), y = y(P).

Đoạn thẳng nối P, Q $\in$ □ được kí hiệu bởi (PQ), [PQ], [PQ)... tùy theo nó là mở hoặc đóng tại điểm cuối và kí hiệu độ dài của PQ bởi |PQ|.

Ta cũng xem xét P $\in$ □ như một vectơ 2 chiều với gốc O = (0, 0), Vì vậy, aP (a $\geq$ 0) và P + Q là có ý nghĩa (miễn là chúng vẫn thuộc □). Ta giới thiệu sự sắp xếp thẳng \ trong □. Q\ P tức là Q là dưới P, nghĩa là x(Q) = x(P) và y(Q) $\leq$ y(P). Với bất kỳ đoạn thẳng $\sum$ trong □, R\ $\sum$ [$\sum$\R] nghĩa là có S $\in$ $\sum$ sao cho R\S [S\R]. Có một vài điểm quan trọng đặc biệt trong □

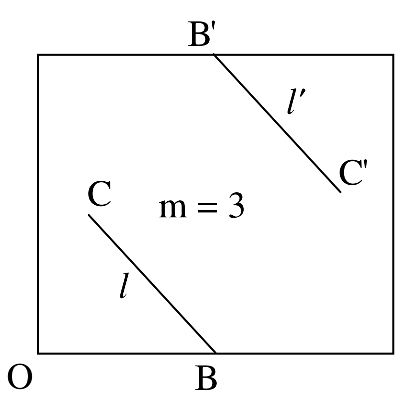
$B = (\frac{1}{2}, 0)$; $\qquad$ $B' = (\frac{1}{2}, 1)$;

$C = (\frac{1}{2} - \frac{1}{m}, \frac{1}{2})$; $\qquad$ $C' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{m}, \frac{1}{2})$;

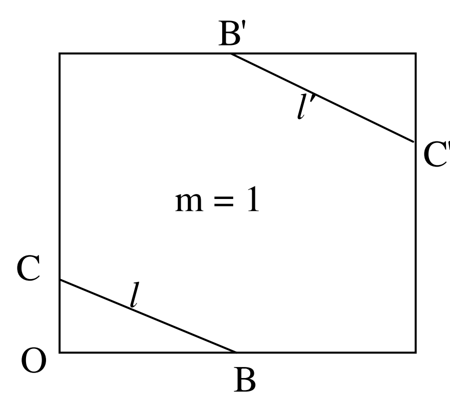
($C = (0, \frac{1}{4})$; $\qquad$ $C' = (1, \frac{3}{4})$ nếu m = 1).

Đoạn thẳng l = [BC) và l' = [BC$'$) là quan trọng nhất (l = [BC]; l' = [B'C'] nếu m = 1). Đó là các phần của các đoạn thẳng

$$x + \frac{2y}{m} = \frac{1}{2} \text{ và } x + \frac{2y}{m} = \frac{1}{2} + \frac{2}{m}.$$ (xem hình 1 và 1a).



Hình.1.



Hình.1a.

Cuối cùng ta đặt L(P) = $L^r(L^q)$ nếu :P = $(\frac{1}{q}, \frac{1}{r})$;

Chuẩn trong L(P) được kí hiệu là ‖ :L(P)‖, hoặc đơn giản là ‖ :P‖.

Cụ thể với P = $(\frac{1}{q}, \frac{1}{r})$; u ∈ L(P) thì

$$\|u :P\| = \left(\int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^m} |u(x,t)|^q \, dx \right|^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_0^T \left| \| u(x,t) \|_{L^q(\mathbb{R}^m)} \right|^r dt \right)^{\frac{1}{r}}.$$

BC biểu thị lớp các hàm số liên tục, bị chặn. C biểu thị là hằng số dương bất kỳ.

1.3. Không gian Sobolev

1.3.1. Định nghĩa

(i) Với s là số nguyên, s > 0, ký hiệu $H^s(\Omega)$ là không gian các hàm thuộc $L^2(\Omega)$ có đạo hàm suy rộng $D^\alpha u$, $|\alpha| \le s$, $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, với chuẩn là

$$||u||_s = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \le s} | D^\alpha u |^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Chú ý Đây là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(u,v)_s = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \le s} D^\alpha u(x). \overline{D^\alpha v(x)} \, dx.$$

Với $s = 0$ thì $H^0(\Omega) \equiv L^2(\Omega)$.

(ii) Nếu s là số thực tùy ý thì $H^s(\mathbb{R}^n)$ được định nghĩa là

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{ u \in \mathscr{S}' \mid \hat{u}(\xi) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ sao cho } \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \} < \infty.$$

$H^s(\mathbb{R}^n)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng