ỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

KHOA TOÁN KINH TẾ
BỘ MÔN ĐIỀU KHIỂN HỌC KINH TẾ
TRẦN TÚC

GIÁO TRÌNH
QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
GS.TS. TRẦN TÚC

GIÁO TRÌNH
QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

LỜI NÓI ĐẦU

Trên cơ sở chương trình môn học *"Qui hoạch tuyến tính và ứng dụng"* chúng tôi biên soạn tài liệu này phục vụ các sinh viên. Trong bài giảng trình bày một cách ngắn gọn nhưng đầy đủ các nội dung cơ bản của môn học với hình thức và ngôn ngữ thích hợp. Những phần kiến thức mở rộng có tính chất tham khảo được lược bớt đồng thời tăng cường các nhận xét tổng kết, ghi nhận những điều cốt lõi bổ ích cho ứng dụng, thực hành sau mỗi phần khảo sát lý thuyết. Điều này giúp sinh viên nắm được bản chất các phương pháp và tránh được những nhầm lẫn đáng tiếc trong nhận thức đặc biệt trong điều kiện tự học là chính.

Nhằm giúp sinh viên rèn luyện kỹ năng, trong bài giảng có đầy đủ các ví dụ cụ thể mô tả từng tình huống, hướng dẫn tỉ mỉ toàn bộ quá trình giải quyết vấn đề. Ngoài ra nó còn là tài liệu chuẩn để sinh viên chỉnh lý các ghi chép trên lớp.

Để tạo điều kiện thuận lợi cho việc nghiên cứu ngoài 3 chương của môn học :

Chương I: Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát

Chương II: Bài toán đối ngẫu

Chương III: Bài toán vận tải.

Còn đưa vào phần *"Bổ túc kiến thức đại số"* nhắc lại một số kiến thức cần thiết cho các chương sau.

Hy vọng bài giảng sẽ tạo điều kiện thuận lợi cho sinh viên trong quá trình học tập, góp phần nâng cao chất lượng đào tạo. Bài giảng còn có thể dùng cho sinh viên thuộc các hệ khác và những người quan tâm đặc biệt trong trường hợp thiếu thời gian và tự nghiên cứu.

Mặc dù đã rất cố gắng nhưng không thể tránh được thiếu sót, mong nhận được những ý kiến đóng góp bổ ích của bạn đọc.

Hà Nội

Tác giả

BỔ TÚC KIẾN THỨC ĐẠI SỐ

I – VECTƠ N CHIỀU VÀ CÁC PHÉP TÍNH

1 – Các định nghĩa:

- *Ta gọi một tập hợp n số thực được sắp theo một thứ tự nhất định là một vectơ n chiều*, ký hiệu là một mẫu tự, chẳng hạn x. Như vậy $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = \{x_j\}$, $j = 1 \div n$, mỗi số x_j gọi là thành phần hoặc tọa độ thứ j của x. Lưu ý rằng từ đây ta sẽ ký hiệu các vectơ khác nhau bằng các chỉ số mũ, còn các thành phần khác nhau được ký hiệu bằng các chỉ số chân. Ta sẽ định nghĩa một số vectơ đặc biệt mà sau này sẽ thường sử dụng.

- *Vectơ 0:* Vectơ mà mọi thành phần đều bằng không gọi là vectơ không, cũng ký hiệu bằng số 0 nhưng phải ngầm hiểu đó là tập hợp n số 0,

Từ định nghĩa này dễ dàng suy ra rằng một vectơ $x \neq 0$ thì ít nhất phải có một thành phần $x_j \neq 0$, đồng thời khi viết $x \geq 0$ có nghĩa đó là vectơ mà : $x_j \geq 0$ $(\forall j)$.

- *Vectơ đơn vị: Ta gọi vectơ có một thành phần bằng 1 còn các thành phần còn lại đều bằng không là một vectơ đơn vị. Vectơ đơn vị có thành phần j bằng 1 gọi là vectơ đơn vị thứ j và ký hiệu là e^j*

Như vậy có tất cả một hệ n vectơ đơn vị như sau:

$$e^1 = (1, 0, \ldots\ldots, 0)$$
$$e^2 = (0, 1, \ldots\ldots, 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e^n = (0, 0, \ldots\ldots, 1).$$

Để thuận tiện cho việc sử dụng sau này, ta sẽ gọi vectơ có các thành phần sắp thành một hàng hoặc một cột là vectơ hàng hoặc vectơ cột.

2- Các phép tính vectơ.

a) Hai vectơ bằng nhau: Ta gọi 2 vectơ n chiều x và y là bằng nhau nếu các thành phần tương ứng của chúng đều bằng nhau, nghĩa là khi viết $x = y$ thì phải hiểu: $x_j = y_j$ ($j = 1 \div n$). Như vậy hai vectơ bằng nhau là hai vectơ có các thành phần giống hệt nhau.

b) Phép cộng 2 vectơ : Ta gọi tổng của hai vectơ n chiều x và y là một vectơ n chiều z mà các thành phần của nó là tổng các thành phần tương ứng của x và y, nghĩa là : $x + y = z$: $z_j = x_j + y_j$ ($j=1 \div n$).

Như vậy phép cộng chỉ thực hiện được trên những vectơ có cùng số chiều và thực chất quy về phép cộng các số, do đó nó cũng có đầy đủ các tính chất của phép cộng các số.

c) Phép nhân vectơ với một số : Ta gọi tích của một vectơ n chiều x với một hằng số α là một vectơ n chiều ký hiệu là αx mà các thành phần của nó là các thành phần tương ứng của x được nhân lên với α, nghĩa là :$\alpha x = \{\alpha x_j\}$. Thực chất của phép tính này cũng quy về phép tính trên các số. Phép nhân vectơ với số sẽ cho một vectơ nằm trên cùng một giá với vectơ x chỉ khác nhau về độ dài, vì thế ta sẽ gọi nó là một bội của x. Phép nhân vectơ với số có thể hình dung là phép dãn hoặc co vectơ, nó cũng có đầy đủ các tính chất của phép nhân các số. Dưới đây ta sẽ xét những tính chất cơ bản của hai phép tính này.

- Tính giao hoán : $x + y = y + x$

$$\alpha x = x.\alpha$$

- Tính kết hợp : $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x = \alpha\beta x.$$

-Luật phân bố : $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

Tóm lại về mặt hình thức thì mọi quy tắc tính toán đại số đều có thể dùng cho vectơ. Các phép tính nói trên đều không vượt khỏi phạm vi các vectơ n chiều. Ta sẽ gọi tập hợp tất cả các vectơ n chiều là không gian vectơ n chiều, ký hiệu là R^n. Dưới đây ta sẽ xét một phép tính mà kết quả của nó không nằm trong R^n.

• *d) **Tích vô hướng của hai vectơ:** Ta gọi tích vô hướng của 2 vectơ n chiều x và y là một số được xác định bởi tổng các tích của các thành phần tương ứng của x và y, ký hiệu là (x,y).*

Như vậy :

$$(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots\dots + x_ny_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j .$$

Từ định nghĩa này người ta đã chứng minh được rằng: nếu gọi φ là góc tạo bởi 2 vectơ x và y thì :(x,y)=| x.| y | cos φ, do vậy nếu góc φ là nhọn thì (x,y) > 0, nếu góc φ tù thì (x,y) < 0, còn khi φ = Π/ 2 thì (x,y) = 0, vì thế từ đây ta sẽ gọi 2 vectơ x và y là trực giao nếu (x,y) = 0. Cũng từ định nghĩa dễ dàng suy ra các tính chất của tích vô hướng như sau: (x,y) = (y,x) ; (αx,y) = α(x,y) ; (x,y+z) = (x,y) + (x,z).

3- Độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Ta gọi một hệ thống m vectơ n chiều $\{x^i : i = 1 \div m\}$ là phụ thuộc tuyến tính nếu đối với mỗi vectơ x^i đều tìm được một hằng số α_i, trong đó ít nhất một $\alpha_i \neq 0$ sao cho :

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i = 0,$$

nếu đẳng thức trên chỉ xảy ra khi $\alpha_i = 0$ (∀i) thì hệ vectơ $\{x^i\}$ ($i = 1 \div m$) gọi là độc lập tuyến tính.

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra một hệ vectơ chỉ gồm một vectơ 0 là phụ thuộc tuyến tính, một hệ gồm một vectơ $x \neq 0$ là độc lập tuyến tính. Cũng dễ dàng chứng minh được một hệ vectơ gồm 2 vectơ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng tỷ lệ với nhau và độc lập tuyến tính khi và chỉ khi chúng không tỷ lệ. Thật vậy giả sử hệ $\{x, y\}$ phụ thuộc tuyến tính, theo định nghĩa ta phải tìm được 2 hằng số α và β trong đó chẳng hạn $\alpha \neq 0$ sao cho:

$\alpha x + \beta y = 0$, do $\alpha \neq 0$ suy ra $x = -\dfrac{\beta}{\alpha} y$, tức là x và y tỷ lệ, từ đó điều ngược lại là hiển nhiên.

Xét hệ thống vectơ $\{x^i : i = 1 \div m\}$ và vectơ y thuộc không gian R^n. Nếu có đẳng thức $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i$ thì ta nói y là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\{x^i\}$, hay y biểu diễn tuyến tính qua các vectơ $\{x^i\}$. Về sự biểu hiện của các hệ thống vectơ độc lập và phụ thuộc tuyến tính ta có các mệnh đề sau:

- Một hệ vectơ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi ít nhất có một vectơ của hệ biểu diễn tuyến tính qua các vectơ còn lại.

Thật vậy nếu hệ vectơ $\{x^i : i = 1 \div m\}$ là phụ thuộc tuyến tính thì $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i = 0$ với ít nhất, chẳng hạn, $\alpha_1 \neq 0$. Khi đó $x^1 = -\sum_{i=2}^{m} \dfrac{\alpha_i}{\alpha_1} x^i$, nghĩa là x^1 biểu diễn tuyến tính qua những vectơ còn lại. Ngược lại nếu có một vectơ của hệ biểu diễn tuyến tính qua những vectơ còn lại, tức là, chẳng hạn $x_1 = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i x^i$, khi đó $x_1 - \sum_{i=2}^{m} \alpha_i x^i = 0$ với hệ số của x^1 bằng 1 nên hệ $\{x^i\}$