ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐINH TIẾN HOÀNG

BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG TỔNG QUÁT LOẠI II VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2012

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết tối ưu được hình thành từ những ý tưởng về cân bằng kinh tế, lý thuyết giá trị của Edgworth và Pareto từ cuối thế kỉ XIX và đầu thế kỉ XX. Sau đó có rất nhiều công trình đã được nghiên cứu và ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của ngành khoa học và kĩ thuật cũng như thực tế: Borel (1921), Von Neuman (1926) đã xây dựng lý thuyết trò chơi dựa trên các khái niệm và kết quả toán học, Koopman (1947) đã đưa ra lý thuyết lưu thông hàng hóa. Lý thuyết tối ưu véctơ là bộ phận quan trọng của lý thuyết tối ưu. Sau những công trình của H.W. Kuhn và A.W.Tucker về các điều kiện cần và đủ cho 1 véctơ thoản mãn các ràng buộc là nghiệm hữu hiệu, tối ưu véctơ thực sự là một ngành toán học độc lập và có nhiều ứng dụng trong thực tế. Các bài toán cơ bản trong lý thuyết tối ưu bao gồm: bài toán tối ưu, bài toán cần bằng Nash, bài toán bù, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm yên ngựa, ...

Bài toán điểm cân bằng được biết đến từ lâu bởi các công trình của Arrow-Debreu, Nash sau đó được nhiều nhà toán học sử dụng để xây dựng mô hình kinh tế từ nửa sau thế kỉ XX. Ky Fan (1972) và Browder-Minty (1978) đã phát biểu và chứng minh tự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng dựa trên các định lý điểm bất động. Năm 1991, Blum và Oettli đã phát biểu bài toán cân bằng một cách tổng quát và tìm cách liên kết bài toán của Ky Fan và Browder-Minty với nhau thành dạng chung cho cả hai. Bài toán được phát biểu ngắn gọn là: tìm $\bar{x} \in K$ sao cho $f(\bar{x}, x) \geq 0, \forall x \in K$, trong đó K là tập cho trước, $f: K \times K \longrightarrow R$ là hàm số thực thỏa mãn $f(x, x) \geq 0$. Đây là dạng suy rộng trực tiếp của bài toán cổ điển trong lý thuyết tối ưu véctơ.

Ban đầu người ta nghiên cứu những bài toán liên quan đến ánh xạ đơn trị từ không gian hữu hạn chiều này sang không gian hữa hạn chiều khác mà thứ tự được đưa ra bởi nón Orthant dương. Sau đó mở rộng sang không gian có số chiều vô hạn với nón bất kì. Khái niệm về ánh xạ đa trị đã được xây dựng và phát triển bởi bản thân toán học và các lĩnh vực khoa học khác. Những định nghĩa, tính chất, sự phân lớp của ánh xạ đơn trị dần được mở rộng cho ánh xạ đa trị. Từ đó người ta tìm cách chứng minh các kết quả thu được từ đơn trị sang đa trị. Chính vì lẽ đó, bài toán điểm cân bằng được nhiều nhà nghiên cứu đặc biệt quan tâm trong những năm gần đây. Với những lý do trên mà chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu cho luận văn là: **"Bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II và ứng dụng"**.

2. Mục đích nghiên cứu

Đối với ánh xạ đa trị, bài toán điểm cân bằng đã được xây dựng một cách tổng quát do Blum và Oettli đặt ra. Có rất nhiều sự mở rộng của bài toán cân bằng đối với ánh xạ đa trị, tuy nhiên kết quả đạt được của nhiều tác giả cho đến nay vẫn chưa thực sự tổng quát cho các bài toán liên quan đến ánh xạ đa trị như trường hợp của đơn trị.

Để tìm nghiệm của bài toán tối ưu, thông thường người ta thường đưa ra các thuật toán về quy hoạch như: quy hoạch lồi, quy hoạch Lipshitz hay phương pháp Newton xây dựng dãy hội tụ về nghiệm. Chính vì vậy sự tồn tại nghiệm của bài toán là một trong những vấn đề quan trọng khi nghiên cứu các bài toán trong lý thuyết tối ưu véctơ. Mục đích của luận văn là đưa ra mô hình bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II, nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và ứng dụng của nó trong các bài toán tối ưu véctơ.

3. Đối tượng nghiên cứu

Luận văn tập trung nghiên cứu bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II.

4. Phạm vi nghiên cứu

Luận văn nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II và các bài toán liên quan trong lý thuyết tối ưu.

5. Phương pháp nghiên cứu

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán đặt ra trong luận án, chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu chính là định lý điểm bất động của Ky Fan, Fan-Browder và định lý KKM.

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn.

Làm phong phú thêm các kết quả nghiên cứu về bài toán tựa cân bằng và các bài toán khác trong lý thuyết tối ưu.

Ứng dụng vào các bài toán thực tế như: xây dựng lý thuyết trò chơi, đưa ra mô hình kinh tế....

7. Cấu trúc luận án

Luận văn được chia làm ba chương:

Chương 1: Đưa ra một số khái niệm liên quan như không gian thường dùng: không gian định chuẩn, không gian Hilbert, không gian tuyến tính lồi địa phương Haussdorff; nón và các khái niệm liên quan; ánh xạ đa trị.

Chương 2: Trình bày bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II và điều kiện nghiệm của bài toán.

Chương 3: Ứng dụng của bài toán tựa cân bằng vào trong bài toán tựa cân bằng vô hướng và bài toán tối ưu loại II.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong thực tế, nhiều bài toán liên quan đến phép chuyển mỗi điểm của tập này thành một tập con của tập kia. Những khái niệm cổ điển về hàm số, về toán tử hay về ánh xạ không còn thích hợp nữa. Việc mở rộng ánh xạ đa trị là tất yếu do nhu cầu thực tại của các vấn đề nảy sinh từ tự nhiên và cuộc sống. Chính vì vậy mà môn giải tích đa trị được hình thành và trở thành công cụ đắc lực để nghiên cứu các bài toán liên quan đến ánh xạ đa trị. Ta dành trọn cả chương này để nhắc lại một số kiến thức cơ bản của môn giải thích đa trị này. Các kiến thức này rất quan trọng trong việc nghiên cứu các bài toán ở chương sau.

1.1. Một số không gian thường dùng

1.1.1. Không gian định chuẩn

Định nghĩa 1.1. Không gian tuyến tính định chuẩn là cặp $(X, \|.\|)$, trong đó X là không gian tuyến tính, còn $\|.\|$ là một ánh xạ $X \longrightarrow R$ thỏa mãn:

(i) $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$ và $\|x\| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$;

(ii) $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

(iii) $\forall x \in X, \forall \lambda, \|\lambda x\| = \|\lambda\|. \|x\|$.

1.1.2. Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.2. Cho X là không gian tuyến tính trên trường $K = \{R, C\}$. Hàm số $\langle .,. \rangle: X \times X \longrightarrow K$ được gọi là tích vô hướng trên X nếu:

(i) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}, \forall x, y \in X$ (kí hiệu $\overline{\langle x, y \rangle}$ là số phức liên hợp của số phức $\langle y, x \rangle$);

(ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in X$;

(iii) $\langle \lambda x, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle, \forall \lambda \in K$;

(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Không gian X được trang bị tích vô hướng gọi là khôn gian tiền Hilbert.

Trong không gian tiền Hilbert ta luôn có bất đẳng thức Cauchuy – Schwarz sau:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle . \langle y, y\rangle, \forall x, y \in X.$$

Từ bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ là một chuẩn trong không gian X. Không gian tiền Hilbert là một không gian định chuẩn. Do đó, trên đó có thể định nghĩa dãy Cauchy và tính đầy đủ. Vậy ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.3. Không gian tiền Hilbert đầy đủ gọi là không gian Hilbert.

1.1.3. Không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Haussdorff

Định nghĩa 1.4. Cho tập hợp X, gọi $\mathcal{T}$ là các tập con của X. Khi đó X được gọi là không gian tôpô nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$;

(ii) Với $U_t \in \mathcal{T}, \forall t \in T$ thì

$$\bigcup_{t \in T} U_t \in \mathcal{T};$$

(iii) Với $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ thì $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Một không gian tuyến tính thực hay phức có thể đồng thời trang bị một cấu trúc tôpô và một cấu trúc đại số (phép cộng hai phần tử và phép nhân một số với một phần tử). Khi ấy ta có một không gian vừa tuyến tính, vừa tôpô. Vấn đề đáng chú ý là hai cấu trúc đó có quan hệ với nhau như thế nào để không gian nảy sinh ra nhiều tính chất mới. Ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.5. Ta nói rằng một tôpô $\mathcal{T}$ phù hợp với cấu trúc đại số trong không gian X, nếu các phép tính đại số trong X liên tục trong tôpô $\mathcal{T}$, tức là nếu:

(i) $x + y$ là một ánh xạ liên tục của hai biến x, y; nói rõ hơn, với mọi lân cận V của điểm $x + y$ đều tồn tại lân cận U_x của x và lân cân U_y của y sao cho nếu $x' \in U_x, y' \in U_y$ thì $x' + y' \in V$.

(ii) αx là ánh xạ liên tục của hai biến α, x; nói rõ hơn, với mọi lân cận V của αx đều có một số $\varepsilon > 0$ và một lân cận U của x sao cho nếu $|\alpha' - \alpha| < \varepsilon, x' \in U$ thì $\alpha' x' \in V$.

Không gian tuyến tính *X* trên đó có một tôpô tương thích với cấu trúc đại số được gọi là không gian tôpô tuyến tính.

Định nghĩa 1.6. Không gian tôpô tuyến tính *X* được gọi là không gian lồi địa phương nếu mọi phần tử của X có cơ sở lân cận thành lập từ các tập lồi, hay tương đương phần tử $0 \in X$ có cơ sở lân cận thành lập từ các tập lồi.

Định nghĩa 1.7. Không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ được gọi là không gian Haussdorff nếu với mỗi $x, y \in X, x \neq y$ bao giờ cũng tồn tại lân cận U_x của x và U_y của y thỏa mãn $U_x \cap U_y = \emptyset$.

1.2. Nón và các khái niệm liên quan

Trong không gian các số thực, hai phần tử bất kì đều so sánh được với nhau qua khái niệm lớn hơn hay bé hơn hoặc bằng. Điều này không có được trong các không gian khác. Muốn mở rộng các bài toán nhận giá trị thực sang các bài toán nhận các giá trị vectơ và đa trị người ta đưa vào các khái niệm mới đồng thời có thể xây dựng những khái niệm tương tự của số thực, số phức trong không gian tôpô tuyến tính. Một phương pháp hữu hiệu để xây dựng những khái niệm đó là đưa nón vào không gian tôpô tuyến tính.

Định nghĩa 1.2.1. Cho *Y* là không gian tuyến tính và *C* là tập con trong *Y*. *C* gọi là *nón có đỉnh tại gốc* (gọi ngắn gọn là nón) trong *Y* nếu $tc \in C, \forall c \in C$, $t \geq 0$.

Nón *C* được gọi là nón lồi nếu *C* là tập lồi. Nếu *Y* là không gian tôpô tuyến tính và *C* là nón trong *Y*, kí hiệu *clC, intC, convC* là bao đóng, phần trong, và bao lồi của nón *C*, $l(C) = C \cap (-C)$. Khi nghiên cứu các bài toán liên quan đến nón, người ta thường quan tâm đến các loại nón sau:

(i) Nón *C* gọi là nón đóng nếu *C* là tập đóng.

(ii) Nón *C* gọi là nón nhọn nếu $l(C) = \{0\}$.

(iii) Nón *C* gọi là nón sắc nếu bao đóng của nó là nón nhọn.

(iv) Nón *C* gọi là nón đúng nếu $clC + C\backslash l(C) \subseteq C$.

Dễ thấy rằng nếu *C* là nón đóng thì *C* là nón đúng.

Với nón *C* cho trước ta định nghĩa quan hệ như sau: $x, y \in Y, x \succcurlyeq cy$ nếu $x - y \in C$. Nếu không có sự nhầm lẫn ta có thể viết đơn giản $x \succcurlyeq y$.

Kí hiệu $x \succ y$ nếu $x - y \in C\backslash l(C)$ và $x \gg y$ nếu $x - y \in intC$.

Ta thấy quan hệ trên là một quan hệ thức tự, nếu *C* là nón lồi thì quan hệ thứ tự trên là tuyến tính và là quan hệ thứ tự từng phần trên *Y*. Hơn nữa, nếu *C* là nón nhọn thì quan hệ trên có tính phản đối xứng, nghĩa là nếu $x \succcurlyeq y$ và $y \succcurlyeq x$ thì $x = y$.

Dưới đây là một số ví dụ về nón.

Ví dụ 1.2.1. 1. Tập {0} và *Y* là nón trong không gian *Y*. Ta gọi chúng là các nón tầm thường.

2. Cho R^n là không gian Euclid n chiều, tập

$$C = R_+^n = \left\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \middle| x_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n\right\}$$

là nón lồi, đóng, nhọn và được gọi là nón Orthant dương của R^n.

Nếu lấy $C = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n | x_1 \geq 0\}$ thì *C* là nón lồi, đóng nhưng không nhọn. Vì $l(C) = \{x = (0, x_2, \dots, x_n) \in R^n\} \neq \{0\}$.

3. Cho Ω là không gian dãy các dãy số thực. $C = \{x = \{x_n\} \in \Omega \colon \mathrm{x_n} \geq 0, \forall \mathrm{n}\}$. *C* là nón lồi, nhọn. Ta chưa thể nói nó sắc hay đúng vì chưa có tôpô đưa vào không gian.

4. Cho $L_p[0,1], 0 < p < 1$ là không gian các hàm trên [0;1].

$$L_p[0,1] = \left\{x(t), t \in [0,1], \int_0^1 |x|^p d\mu < \infty, \mu \text{ là độ đo } L\sigma be\right\}.$$

Tôpô trên không gian được xác định bởi cơ sở lân cận của 0, gồm các tập có dạng

$$\left\{x \in L_p[0,1], \left(\int_0^1 |x|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{n}\right\}.$$

Tập $C = \{x \in L_p[0,1]: x(t) \geq 0, t \in [0,1]\}$ là lồi, đóng.

Định nghĩa 1.2.3. Cho *C* là nón trong không gian tuyến tính *Y*. $B \subseteq Y$ được gọi là tập sinh của nón *C*, kí hiệu $C = cone(B)$ nếu $C = \{tb | b \in B, t \geq 0\}$.

Trong trường hợp *B* không chứa điểm gốc và với mọi $c \in C, c \neq 0$ đều tồn tại duy nhất $b \in B, c = tb$, thì B được gọi là cơ sở của nón *C*. Hơn nữa, nếu *B* là tập hữu hạn phần tử thì tập $C = cone(convB)$ gọi là nón đa diện.

Khi ta xây dựng một nón trên không gian tuyến tính nghĩa là ta xây dựng trên đó một quan hệ thứ tự và từ quan hệ đó ta có thể tìm được các điểm hữu hiệu của tập hợp. Ta có khái niệm sau:

Định nghĩa 1.2.4. Cho *Y* là không gian tôpô tuyến tính với thứ tự được sinh bởi nón lồi *C* và *A* là tập con của *Y*. Ta nói rằng:

(i) Điểm $x \in A$ là *điểm hữu hiệu lý tưởng* của tập *A* đối với nón *C* nếu $y - x \in C, \forall y \in A$.

Tập các điểm hữu hiệu lý tưởng của *A* đối với nón *C* được kí hiệu là *IMin(A\C)* hay *IMinA*.

(ii) Điểm $x \in A$ là *điểm hữu Pareto* (cực tiểu Pareto) của tập *A* đối với nón *C* nếu $\nexists y \in A$ để $x - y \in C \backslash l(C)$. Tập các điểm hữu hiệu Pareto của *A* đối với nón *C* được kí hiệu là *PMin(A\C)* hoặc đơn giản hơn *MinA*.

(iii) Điểm $x \in A$ là *điểm hữu hiệu yếu* (khi $intC \neq \emptyset$ và $C \neq Y$) của tập *A* đối với nón *C* nếu $x \in Min(A \backslash (\{0\} \cup intC))$. Tức là x là điểm hữu hiệu Pareto đối với nón $C_0 = \{0\} \cup intC$. Tập các điểm hữu hiệu yếu của *A* đối với nón *C* được kí hiệu là *WMin(A\C)* hoặc *WMinA*.

(iv) Điểm $x \in A$ được gọi là điểm hữu hiệu thực sự của tập *A* đối với nón *C* nếu tồn tại nón lồi $\tilde{C}$ khác toàn không gian và chứa *C\l(C)* trong phần trong của nó để $x \in PMin(A\backslash\tilde{C})$.

Tập các điểm hữu hiệu thực sự của *A* đối với nón *C* được kí hiệu là *PrMin(A\C)* hay *PrMinA.*

Từ định nghĩa trên ta luôn có $IMinA \subset PrMinA \subseteq MinA \subseteq WMinA$.

1.3. Ánh xạ đa trị

1.3.1. Các định nghĩa

Cho *X* là tập hợp bất kì. Ký hiệu 2^X là tập gồm các tập con của *X*.

Định nghĩa 1.3.1.1. Mỗi ánh xạ *F* từ tập *X* vào 2^Y được gọi là ánh xạ đa trị từ *X* vào *Y*, kí hiệu $F: X \longrightarrow 2^Y$ (Đôi khi người ta sử dụng kí hiệu $F: X \rightrightarrows 2^Y$ vì vậy để thống nhất trong luận văn này sử dụng kí hiệu đã trình bày trước).

Như vậy mỗi $x \in X, F(x)$ là một tập con của *Y*, không loại trừ khả năng với một số phần tử *x* nào đó *F(x)* là tập rỗng. Nếu $A \subset X$ thì ta kí hiệu $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$ và gọi nó là ảnh của tập *A* qua ánh xạ *F*. Nếu $x \in X, F(x)$ gồm một phần tử của *Y* ta nói *F* là ánh xạ đơn trị từ *X* vào *Y*, thay cho kí hiệu $F: X \longrightarrow 2^Y$ đôi khi ta sử dụng kí hiệu là $F: X \rightrightarrows Y$.

Miền định nghĩa, đồ thị và miền ảnh của F được định nghĩa lần lượt như sau:

$$domF = \{x \in D | F(x) \neq \emptyset\};$$

$$Gr(F) = \{(x, y) \in D \times Y | y \in F(x)\};$$

$$rgeF = \{y \in Y | \exists x \in X : y \in F(x)\}.$$

Ví dụ 1.3.1.2. Cho a, b là các số thực, $F: R \longrightarrow 2^R$ được xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} (a; b), & nếu\ x \neq 0; \\ \{a\}, & nếu\ x = 0; \end{cases}$$

khi đó *F* là ánh xạ đa trị.

Cho $F: X \longrightarrow 2^Y$, ánh xạ $F^{-1}: Y \longrightarrow 2^X$ được xác định bởi