ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VŨ TRỌNG ĐẠI

BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH HÓA PHẢN HỒI ĐẦU RA HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2012

MỤC LỤC

MỘT SỐ KÝ HIỆU

- $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$: tập các số thực;
- $\mathbb{R}^{+} = [0; +\infty)$: tập các số thực không âm;
- $\mathbb{R}^{n\times r}$: không gian các ma trận $n \times r$ chiều ;
- $\mathbb{R}^{n}$: không gian véc tơ tuyến tính thực n chiều với ký hiệu tích vô hướng là $\langle .,. \rangle$ và chuẩn véc tơ là $\|.\|$;
- $\mathbb{C}([a;b], \mathbb{R}^{n})$: tập tất cả các hàm liên tục trên $[a;b]$ và nhận giá trị trên $\mathbb{R}^{n}$.
- $L_2([a;b], \mathbb{R}^{m})$: tập tất cả các hàm khả tích bậc hai trên $[a;b]$ và lấy giá trị trong $\mathbb{R}^{m}$.
- A^{T} : ma trận chuyển vị của ma trận A, ma trận A được coi là đối xứng nếu $A = A^{T}$;
- I : ma trận đơn vị ;
- $\lambda(A)$: tập các giá trị riêng của ma trận A ;
- $\lambda_{\max}(A) = \max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$;
- $\lambda_{\min}(A) = \min\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$;
- $A > 0$: ma trận A xác định dương ;
- $A \geq 0$: ma trận A xác định không âm ;
- $A \geq B : A - B \geq 0$;

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết điều khiển toán học là một trong những lĩnh vực toán học ứng dụng quan trọng mới xuất hiện và phát triển trong những thập kỷ gần đây. Tính ổn định là một trong những tính chất quan trọng của lí thuyết định tính các hệ động lực và được sử dụng nhiều trong các lĩnh vực cơ học, vật lý toán, kỹ thuật, kinh tế, ... Một hệ thống được gọi là ổn định tại một trạng thái cân bằng nào đó nếu các nhiễu nhỏ của các dữ kiện hoặc các cấu trúc ban đầu của hệ thống không làm cho hệ thống thay đổi nhiều so với trạng thái cân bằng đó. Bài toán ổn định hệ thống được bắt đầu nghiên cứu từ cuối thế kỉ XIX bởi nhà toán học V.Lyapunov, từ những năm 60 của thế kỉ XX, song song với sự phát triển của lý thuyết điều khiển và do nhu cầu nghiên cứu các tính chất chất định tính của hệ thống điều khiển người ta bắt đầu nghiên cứu các tính chất ổn định của hệ thống điều khiển hay còn gọi là ổn định hóa của hệ. Trải qua quá trình nghiên cứu và phát triển, đến nay lý thuyết ổn định, ổn định hóa các hệ phương trình vi phân đã được nghiên cứu và phát triển như một lý thuyết toán học độc lập và được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực toán học ứng dụng, điều khiển kỹ thuật, kinh tế, ...

Trong thực tế, nhiều bài toán đề cập các vấn đề kĩ thuật, điều khiển thường liên quan đế các hệ động lực mô tả bởi các phương trình toán học với thời gian liên tục hay rời rạc dạng:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right), t \ge 0$$

$$x(k+1) = f\left(k, x(k), u(k)\right), k = 0,1,2,...$$

trong đó $x(.)$ là biến trạng thái mô tả đối tượng đầu ra, $u(.)$ là biến điều khiển mô tả đối tượng đầu vào của hệ thống. Các đối tượng điều khiển trong mô hình điều khiển hệ thống được mô tả như những dữ liệu đầu vào có tác động ở mức độ này hay mức độ khác có thể làm ảnh hưởng đến sự vận hành đầu ra của hệ thống.

Một trong những mục đích quan trọng của của bài toán điều khiển hệ thống là tìm điều khiển đầu vào sao cho hệ thống đầu ra có tính chất mong muốn. Vấn đề ổn định hóa hệ thống điều khiển là tìm các hàm điều khiển phản hồi (feedback controls) sao cho hệ thống đã cho ứng với điều khiển đó trở thành hệ thống ổn định được tại trạng thái cân bằng.

Đề tài có tính thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích chính của luận văn này là trình bày một số điều kiện đảm bảo tính ổn định và ổn định hóa phản hồi đầu ra hệ phương trình vi phân tuyến tính và hệ phương trình vi phân tuyến tính có trễ.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

- Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về bài toán ổn định hóa phương trình vi phân tuyến tính gồm ổn định hóa phản hồi trạng thái và ổn định hóa phản hồi đầu ra.

- Trình bày một số kết quả về ổn định hóa phản hồi đầu ra các hệ phương trình vi phân tuyến tính.

3. Phương pháp nghiên cứu

- Sử dụng các phương pháp của lý thuyết điều khiển và lý thuyết ổn định.

- Kế thừa phương pháp và kết quả của Lyapunov.

4. Bố cục của luận văn

Luận văn gồm phần mở đầu, hai chương và tài liệu tham khảo. Cụ thể là:

Chương 1: Cơ sở toán học.

Chương 2: Ổn định hóa phản hồi đầu ra các hệ phương trình vi phân tuyến tính.

Chương một trình bày một số kiến thức về phương trình vi phân, ổn định phương trình vi phân tuyến tính, phương pháp hàm Lyapunov và đặc biệt là bài toán ổn định hóa hệ phương trình vi phân tuyến tính gồm ổn định hóa phản hồi trạng thái và ổn định hóa phản hồi đầu ra.

Trong chương hai chúng tôi xin giới thiệu và chứng minh một số định lý cơ bản về điều kiện cần và đủ cho ổn định hóa phản hồi đầu ra bằng phương thức tiếp cận bất đẳng thức ma trận, ổn định hóa phản hồi trạng thái và ổn định hóa đầu ra cho hệ tuyến tính có trễ.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của thầy giáo GS TSKH Vũ Ngọc Phát, nhân dịp này em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Em xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo ở Viện Toán học và trường Đại học sư phạm Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy em trong quá trình học cao học. Tôi xin cảm ơn ban chủ nhiệm khoa Toán, khoa sau đại học trường Đại học sư phạm Thái Nguyên đã quan tâm giúp đỡ tạo điều khiện cho tôi hoàn thành kế hoạch học tập của mình. Tôi xin chân thành cảm ơn gia đình, các bạn bè đồng nghiệp đã cổ vũ động viên tôi trong suốt quá trình làm luận văn.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Chương 1
CƠ SỞ TOÁN HỌC

Trong chương này trình bày một số kiến thức cơ bản về hệ phương trình vi phân, lý thuyết ổn định hệ phương trình vi phân, phương pháp hàm Lyapunov, bài toán ổn định hóa hệ phương trình vi phân tuyến tính và phương trình vi phân tuyến tính có trễ dựa trên các tài liệu $[1]$, $[2]$, $[4]$.

1.1. Phương trình vi phân

- Xét phương trình vi phân có dạng :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), & t \in I = [t_0, t_0 + b], \\ x(t_0) = x_0, & x \in \mathbb{R}^n, t_0 \geq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó $f(t,x): I \times D \to \mathbb{R}^n, D = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq a\right\}$.

Nghiệm phương trình vi phân (1.1) là hàm số $x(t)$ khả vi liên tục thỏa mãn:

i, $(t, x(t)) \in I \times D$,

ii, $x(t)$ thỏa mãn phương trình vi phân (1.1).

Giả sử hàm $f(t,x)$ liên tục trên $I \times D$, khi đó nghiệm $x(t)$ cho bởi dạng tích phân sau: $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$.

Định lý sau đây khẳng định sự tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình vi phân (1.1).

1.1.1. Định lý *(Định lý Picard - Lindeloff)*

Xét phương trình vi phân (1.1) trong đó giả sử hàm

$$f(t,x): I \times D \to \mathbb{R}^n$$

là liên tục theo t và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo x:

$$\exists K > 0 : \left\| f\left(t, x_1\right) - f\left(t, x_2\right) \right\| \le K \left\| x_1 - x_2 \right\|, \quad \forall t \ge 0.$$

Khi đó với mỗi $\left(t_0, x_0\right) \in I \times D$ sẽ tìm được số $d > 0$ sao cho (1.1) luôn có nghiệm duy nhất trên khoảng $\left[t_0 - d, t_0 + d\right]$. Hay nói cách khác, qua mỗi điểm $\left(t_0, x_0\right) \in I \times D$ có một và chỉ một đường cong tích phân chạy qua.

Định lý sau đây, với giả thiết nhẹ hơn, cho sự tồn tại nghiệm đối với một lớp các hệ phương trình vi phân tương đối phổ biến và có nhiều ứng dụng trong lý thuyết điều khiển.

1.1.2. Định lý *(Định lý Caratheodory)*

Giả sử $f(t, x)$ là hàm đo được theo $t \in I$ và liên tục theo $x \in D$ nếu tồn tại hàm khả tích $m(t)$ trên $\left(t_0, t_0 + b\right)$ sao cho

$$\left\| f(t, x) \right\| \le m(t), \quad \forall (t, x) \in I \times D.$$

Khi đó hệ (1.1) có nghiệm trên khoảng $\left[t_0, t_0 + \beta\right]$ nào đó.

Định lý Caratheodory chỉ khẳng định sự tồn tại nghiệm chứ không duy nhất.

Bây giờ ta xét một số trường hợp đặc biệt của phương trình vi phân:

- **Hệ phương trình vi phân tuyến tính ô tô nôm**

Hệ phương trình vi phân tuyến tính ô tô nôm dạng:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + g(t), \quad t \ge 0, \\ x\left(t_0\right) = x_0, \quad t_0 \ge 0 \end{cases} \qquad (1.2)$$

trong đó A là $n \times n -$ma trận hằng số, $g(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ là hàm khả tích thì hệ (1.2) luôn có nghiệm duy nhất cho bởi công thức Cauchy sau

$$x(t) = e^{A(t - t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} g(s) ds, \quad t \ge 0$$

- **Hệ phương trình vi phân tuyến tính không ô tô nôm**

Hệ phương trình vi phân tuyến tính không ô tô nôm dạng

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + g(t), & t \ge 0, \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \ge 0 \end{cases} \qquad (1.3)$$

trong đó $A(t)$ là $n \times n -$ma trận các hàm đo được hoặc liên tục theo t và

$$\|A(t)\| \le m(t), \quad t \ge 0$$

$m(t)$ là các hàm khả tích và $g(t)$ cũng là các hàm khả tích, thì hệ (1.3) cũng có nghiệm duy nhất. Tuy nhiên nghiệm của hệ này không biểu diễn như công thức nghiệm Cauchy mà thông qua ma trận nghiệm cơ bản $\Phi(t,s)$ của hệ thuần nhất:

$$\dot{x} = A(t)x, t \ge 0, x(t_0) = x_0, \qquad (1.4)$$

nghiệm hệ (1.3) cho bởi:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)g(s)ds, \quad t \ge 0$$

trong đó $\Phi(t,s)$ là ma trận nghiệm cở bản của hệ (1.4) thỏa mãn phương trình ma trận

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Phi(t,s) = A(t)\Phi(t,s), & t \ge s, \\ \Phi(t,t) = I, & \forall t \ge 0 \end{cases}$$

1.2. Lý thuyết ổn định phương trình vi phân

1.2.1. Xét một hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), & t \ge 0 \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \ge 0 \end{cases} \qquad (1.5)$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái của hệ, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là hàm véc tơ cho trước. Giả thiết $f(t,x)$ là hàm thỏa mãn các điều kiện sao cho nghiệm của bài toán Cauchy hệ (1.5) với điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0, \quad t_0 \geq 0$ luôn có nghiệm. Khi đó dạng tích phân của nghiệm được cho bởi công thức

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad t \geq t_0.$$

1.2.1.1. Định nghĩa

Nghiệm $x(t)$ của hệ (1.5) gọi là ổn định nếu với mọi số $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ sẽ tồn tại số $\delta > 0$ (phụ thuộc vào ε, t_0) sao cho bất kỳ nghiệm $y(t)$, $y(t_0) = y_0$ của hệ thỏa mãn $\|y_0 - x_0\| < \delta$ thì sẽ nghiệm đúng bất đẳng thức

$$\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Nói cách khác nghiệm $x(t)$ là ổn định khi mọi nghiệm khác của hệ có giá trị ban đầu đủ gần với giá trị ban đầu của $x(t)$ thì vẫn đủ gần nó trong suốt thời gian $t \geq t_0$.

Giả sử $\overline{x}(.)$ là một nghiệm ổn định của (1.5), xét phương trình

$$\dot{x} - \dot{\overline{x}} = f(t, x) - f(t, \overline{x})$$

Đặt $y = x - \overline{x}$ thì phương trình trên trở thành

$$\dot{y} = g(t, y) \tag{1.6}$$

trong đó $g(t, y) := f(t, y + \overline{x}) - f(t, \overline{x})$ và $g(t, 0) = 0$.

Ta nhận thấy nếu $x(.)$ là một nghiệm của (1.5) thì $x(.) - \overline{x}(.)$ là nghiệm của (1.6). Mặt khác lại có $x(.) \equiv \overline{x}(.)$ là một nghiệm của (1.5) nên $y(.) \equiv 0$ là một nghiệm của (1.6) và hơn thế nữa dễ dàng kiểm tra được rằng $\overline{x}(.)$ là một nghiệm ổn định của (1.5) khi và chỉ khi $y(.) \equiv 0$ là một nghiệm ổn định của (1.6).

Do đó từ nay về sau ta chỉ xem xét sự ổn định của nghiệm $y(.) \equiv 0$ của