ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÝ ĐỨC VÂN

# NGHIỆM KÌ DỊ TẠI MỘT ĐIỂM CHO PHƯƠNG TRÌNH NAVIER – STOKES

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Thái Nguyên, Năm 2012**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÝ ĐỨC VÂN

# NGHIỆM KÌ DỊ TẠI MỘT ĐIỂM CHO PHƯƠNG TRÌNH NAVIER – STOKES

**Chuyên ngành: Toán Giải tích**
**Mã số: 60.46.01.02**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Người hướng dẫn khoa học: PGS.TSKH Nguyễn Minh Trí**

**Thái Nguyên, Năm 2012**

# MỤC LỤC

# MỘT SỐ KÝ HIỆU

- $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$: Tập các số thực.
- $\mathbb{R}^{+}=[0,+\infty)$: Tập các số thực không âm.
- $\mathbb{R}^{n}$ : Không gian véc tơ tuyến tính thực n chiều với ký hiệu tích vô hướng là <.,.> và chuẩn véc tơ là || . ||.
- $C([a,b],\mathbb{R}^{n})$: tập tất cả các hàm liên tục trên $[a,b]$ và nhận giá trị trên $\mathbb{R}^{n}$.
- $C(U)=\{u:U\to\mathbb{R}:u \text{ liên tục}\}$.
- $C(\bar{U})=\{u\in C(U):u \text{ liên tục đều}\}$.
- $C^{k}(U)=\{u:U\to\mathbb{R}:u \text{ là liên tục khả vi k lần}\}$.
- $C^{k}(\bar{U})=\{u\in C^{k}(U): D^{\alpha}u \text{ là liên tục đều với mọi } |\alpha|\le k\}$. Nếu

  $u\in C^{k}(\bar{U})$ thì $D^{\alpha}u$ thác triển liên tục tới $\overline{U}$ với mọi đa chỉ số $\alpha$, $|\alpha|\le k$.
- $L_{2}([a,b],\mathbb{R}^{m})$: tập các hàm khả tích bậc hai trên $[a,b]$ và lấy giá trị trong $\mathbb{R}^{m}$.
- $C^{\infty}(U)=\{u:U\to\mathbb{R}:u \text{ khả vi vô hạn}\}=\bigcap_{k=0}^{\infty}C^{k}(U)$, $C^{\infty}(\bar{U})=\bigcap_{k=0}^{\infty}C^{k}(\bar{U})$
- $C_{c}(U), C_{c}^{k}(U),...,$ ký hiệu các hàm trong $C(U)$, $C^{k}(U),...,$ với giá compact.
- $L^{p}(U)=\{u:U\to\mathbb{R}:u \text{ là đo được Lebesgue}, \|u\|_{L^{p}(U)}<\infty\}$.

  trong đó $\|u\|_{L^{p}(U)}=\left(\int_{U}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $(1\le p<\infty)$.

- $L^{\infty}(U)=\{u:U\to\mathbb{R}:u$ là đo được Lebesgue, $\|u\|_{L^{\infty}(U)}<\infty\}$.

  Trong đó $\|u\|_{L^{\infty}(U)}=\operatorname{ess}\sup_{U}|u|$.

- $L^{p}_{loc}(U)=\{u:U\to\mathbb{R}:u\in L^{p}(V)$ với mọi $V\subset\subset U\}$.

- $H^{k}(U),W^{k}_{p}(U)\ (k=1,2,3,...)$ ký hiệu các không gian Sobolev.

# MỞ ĐẦU

Nghiệm ổn định hay tự đồng dạng với tính thuần nhất phù hợp đóng một vai trò cốt yếu trong lí thuyết chính quy của các bài toán phi tuyến, chúng có ý nghĩa vật lí và hình học thú vị. Điều này được chứng tỏ trong lí thuyết chính quy của các hàm điều hòa và các mặt cực tiểu. Định lí chính quy địa phương trong [CKN] chỉ ra rằng không tồn tại nghiệm tự đồng dạng với năng lượng địa phương nhỏ (có thể xem trong [TX] cho trường hợp tổng quát). Sử dụng các kết quả trong [NRS], Tsai đã chỉ ra sự tồn tại nghiệm tự đồng dạng với năng lượng địa phương hữu hạn. Tuy nhiên, vẫn còn một câu hỏi cần trả lời đó là liệu rằng nghiệm của phương trình Navier – Stokes trong không gian 3 chiều có thể sinh ra những điểm kì dị trong thời gian hữu hạn hay không? Do đó việc xây dựng những nghiệm đặc biệt của phương trình Navier – Stokes 3 chiều vẫn đáng được quan tâm. Chính vì vậy, tôi chọn đề tài *"Nghiệm kì dị tại một điểm cho phương trình Navier – Stokes"*.

Nội dung Luận văn sẽ trình bày một số kết quả nghiên cứu về nghiệm kì dị tại một điểm cho phương trình Navier – Stokes của Gang Tian và Zhouping Xin.

Qua đây, tôi xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS.TSKH Nguyễn Minh Trí, người đã tận tình hướng dẫn, tạo mọi điều kiện giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Chủ nhiệm Khoa Sau đại học, Ban Chủ nhiệm khoa Toán trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy khoá hoc; xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và các bạn cùng lớp cao học Toán K18B đã luôn quan tâm, động viên và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và làm luận văn.

*Thái Nguyên, ngày 01 tháng 8 năm 2012*

**Tác giả**

**Lý Đức Vân**

# Chương 1. MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này sẽ giới thiệu sơ bộ về không gian Sobolev, một số bất đẳng thức cơ bản, phương trình Stokes, toán tử Stokes, phương trình Navier – Stokes.

## 1.1. Không gian Sobolev

Trong phần này tôi trình bày một số khái niệm và kết quả liên quan đến không gian Sobolev, phần chứng minh chi tiết có thể xem trong [RA].

### 1.1.1. Đạo hàm yếu

**Định nghĩa 1.1.1.**

Giả sử $u, v \in L^1_{loc}(U)$ và $\alpha$ là một đa chỉ số.

Ta nói rằng v là đạo hàm yếu cấp $\alpha$ của u nếu

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx$$

đúng với mọi hàm thử $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Ký hiệu $D^\alpha u = v$.

**Bổ đề 1.1.2.** *(Tính duy nhất của đạo hàm yếu).*

Một đạo hàm yếu cấp $\alpha$ của u nếu tồn tại thì được xác định một cách duy nhất (sai khác trên tập có độ đo không).

### 1.1.2. Không gian Sobolev

**Định nghĩa 1.1.3.** Cố định $1 \le p \le \infty$ và cho k là số nguyên không âm. Không gian Sobolev $W_p^k(U)$ là tập tất cả các hàm khả tổng địa phương $u : U \to \mathbb{R}$ sao cho với mỗi đa chỉ số $\alpha, |\alpha| \le k$, đạo hàm yếu $D^\alpha u$ tồn tại và thuộc $L^p(U)$.

***Chú ý 1.1.4.*** Nếu $p=2$ ta có

$$H^k(U)=W_2^k(U) \qquad (k=1,2,3,...)$$

là không gian Hilbert. Chú ý rằng $H^0(U)=L^2(U)$.

**Định nghĩa 1.1.5.** Nếu $u\in W_p^k(U)$, ta định nghĩa chuẩn của nó là

$$\|u\|_{W_p^k}:=\left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_U |D^\alpha u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (1\le p<\infty)$$

Và $$\|u\|_{W_p^k}:=\sum_{|\alpha|\le k}\text{ess }\sup_U |D^\alpha u|, \qquad (p=\infty).$$

**Định nghĩa 1.1.6.** Bao đóng của $C_c^\infty(U)$ trong $H^k(U)$ được ký hiệu là $H_0^k(U)$.

Như vậy, ta coi $H_0^k(U)$ như là các tập các hàm $u\in H^k(U)$ sao cho $D^\alpha u=0$ trên $\partial U$ với mọi $|\alpha|\le k-1$.

Chúng ta ký hiệu $|u|=\|u\|_{L^2(\Omega)}$.

Chuẩn Dirichlet $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}=\left(\int_\Omega\sum_{i=1}^n |D_i u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ sẽ được ký hiệu là $\|u\|$.

### 1.1.3. Không gian phụ thuộc thời gian

**Định nghĩa 1.1.7.** Không gian $L^p(0,T;X)$ gồm tất cả các hàm đo được $u:[0,T]\to X$ với $\|u\|_{L^p(0,T;X)}:=\left(\int_0^T\|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$ với $1\le p<\infty$,

và $$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)}:=\text{ess}\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_X<\infty.$$

**Định nghĩa 1.1.8.** Không gian $L^p\left(0,T;L^q\right)$ gồm tất cả các hàm đo được $u:\left[0,T\right]\to L^q$

$$\text{với } \left\|u\right\|_{L^p\left(0,T;L^q\right)} := \left(\int_0^T \left\|u\left(t,x\right)\right\|_{L^q(\Omega)}^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega \left|u\left(t,x\right)\right|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,\ 1 \le p < \infty$$

và $\left\|u\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^q\right)} := \operatorname{ess\,sup}_{0\le t\le T}\left\|u\left(t\right)\right\|_{L^q(\Omega)} < \infty$.

**Định nghĩa 1.1.9.** Không gian $C\left(\left[0,T\right];X\right)$ gồm tất cả các hàm liên tục $u:\left[0,T\right]\to X$ với $\left\|u\right\|_{C\left(\left[0,T\right];X\right)} := \max_{0\le t\le T}\left\|u\left(t\right)\right\|_X < \infty$.

**Định lý 1.1.10.** Cho $u\in W_p^1\left(0,T;X\right)$ với $1\le p\le\infty$.

Khi đó $u\in C\left(\left[0,T\right];X\right)$ và

$$u\left(t\right) = u\left(s\right) + \int_s^t u'\left(\tau\right)d\tau$$

với mỗi $0\le s\le t\le T$. Hơn nữa, $\max_{0\le t\le T}\left\|u\left(t\right)\right\| \le C\left\|u\right\|_{W(0,T;X)}$, hằng số C chỉ phụ thuộc vào T.

**Định lý 1.1.11.** Giả sử $u\in L^2\left(0,T;H_0^1\left(U\right)\right)$, với $u'\in L^2\left(0,T;H^{-1}\left(U\right)\right)$.

(i) Khi đó $u\in C\left(\left[0,T\right];L^2\left(U\right)\right)$.

(ii) Ánh xạ $t\mapsto\left\|u\left(t\right)\right\|_{L^2(U)}^2$ là liên tục tuyệt đối, với

$$\frac{d}{dt}\left\|u\left(t\right)\right\|_{L^2(U)}^2 = 2 < u'\left(t\right),u\left(t\right)>, \quad 0\le t\le T \text{ h.k.n}.$$

(iii) Hơn nữa, $\max_{0\le t\le T}\left\|u\left(t\right)\right\|_{L^2(U)} \le C\left(\left\|u\right\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(U)\right)} + \left\|u'\right\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(U)\right)}\right)$,