ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN ĐÌNH LONG

CẬN SAI SỐ CHO BẤT ĐẲNG THỨC LỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN ĐÌNH LONG

CẬN SAI SỐ CHO BẤT ĐẲNG THỨC LỒI

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS TRƯƠNG XUÂN ĐỨC HÀ

Thái Nguyên, năm 2012

MỤC LỤC

BẢNG KÝ HIỆU

$x \in S$	phần tử x thuộc tập S
$y \notin S$	phần tử y không thuộc tập S
$\varnothing$	tập rỗng
$C \subset S$	C là một tập con của S
$C \cap S$	giao của hai tập C và S
$C \cup S$	hợp của hai tập C và S
$C \setminus S$	hiệu của hai tập C và S
$L^{\perp}$	phần bù trực giao của L trong không gian véc tơ
$C \times S$	tích đề các của hai tập C và S
$C + S$	tổng của hai tập C và S trong không gian véc tơ
$C \oplus S$	tổng trực tiếp của hai tập C và S trong không gian véc tơ
λC	vị tự tập C theo tỉ số $\lambda \in \mathbb{R}$ trong không gian véc tơ
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\sup\limits_{x \in K} f(x)$	supremum của tập $\{f(x) : x \in K\}$
$\inf\limits_{x \in K} f(x)$	infimum của tập $\{f(x) : x \in K\}$
$\mathrm{co}A$	bao lồi của tập A
$\overline{\mathrm{co}}A$	bao lồi đóng của tập A
$\mathrm{cl}A$	bao đóng của tập A
$\mathrm{int}\,A$	phần trong của tập A
$\|x\|$	chuẩn của x trong không gian định chuẩn X
$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều
B	quả cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$

0	điểm gốc trong không gian tuyến tinh X
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng trong không gian Hilbert
$N(x; A)$	nón pháp tuyến của A tại x
$T(x; A)$	nón tiếp xúc với A tại x
$\mathrm{dom}(f)$	miền hữu hiệu của f
$\mathrm{epi}(f)$	tập trên đồ thị của f
$\mathrm{dist}(x, y)$	khoảng cách giữa hai điểm x và y
$\mathrm{dist}(x, S)$	khoảng cách từ điểm x tới tập S
$\mathrm{dist}(C, D)$	khoảng cách giữa hai tập C và D
$\mathrm{aff}(A)$	bao afin của tập A
$\mathrm{ri}A$	tập hợp các điểm trong tương đối của A
$L_\alpha(f)$	tập mức dưới của hàm f
$C_\alpha(f)$	tập mức trên của hàm f
$f'(\overline{x}; d)$	đạo hàm theo phương d của hàm f tại $\overline{x}$
$\partial f(\overline{x})$	dưới vi phân của hàm f tại $\overline{x}$
f^*	hàm liên hợp với hàm f
X	không gian lồi địa phương
X^*	không gian liên hợp (tô pô) của không gian X
S_∞	nón lùi xa

LỜI NÓI ĐẦU

Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm nửa liên tục dưới. Bài toán xác định cận sai số toàn cục của hàm f là đi tìm điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của hằng số $\gamma > 0$ sao cho

$$\mathrm{dist}(x, S) \leq \gamma f(x)_+ \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

trong đó $S := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 0\}$ là một tập lồi đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$, "dist" là khoảng cách từ một điểm x bất kỳ tới một tập cố định (chuẩn Euclid), và $f(x)_+ = \max(f(x), 0)$.

Quá trình nghiên cứu cận sai số trong những năm gần đây nhận được nhiều sự chú ý. Năm 1975 Robinson [16] đã thiết lập cận sai số toàn cục của một tập lồi, đóng bất kỳ trong không gian định chuẩn với giả thiết S bị chặn và có phần trong khác rỗng. Tiếp đó Mangasarian [14] nghiên cứu tập lồi, đóng $S \subset \mathbb{R}^n$ xác định bởi hệ hữu hạn bất đẳng thức lồi khả vi và thiết lập cận sai số toàn cục với giả thiết Slater và tiêu chuẩn hạn chế tiệm cận. Sau đó Auslender và Crouzeix [4] mở rộng kết quả của Mangasarian cho những hàm không khả vi. Năm 1994 Luo và Luo [12] nghiên cứu hệ bất đẳng thức bậc hai, lồi và thiết lập cận sai số toàn cục chỉ với giả thiết Slater (không có điều kiện ràng buộc nào nữa). Tiếp đó Klatte [10] nghiên cứu liên hệ giữa tính liên tục Haussdorff của nghiệm với hệ bất đẳng thức có "nhiễu" và cận sai số toàn cục của hệ không nhiễu. Li [13] nhận được một số tính chất thú vị của cận sai số trên tập compact cho những bất đẳng thức lồi khả vi theo khía cạnh tiêu chuẩn hạn chế.

Gần đây, Deng $[6,7]$ xây dựng cận sai số của tập lồi đóng xác định bởi những hàm lồi thực sự đóng trong không gian Banach, với điều kiện Slater trên những hàm lùi xa tương ứng. Deng và Hu $[8]$ nhận được những kết quả cận sai số cho quy hoạch nửa xác định.

Khái niệm cận sai số có vai trò quan trọng trong giải tích biến phân và lý thuyết tối ưu. Nó liên hệ chặt chẽ các bài toán về điều kiện tối ưu, điều khiển tối ưu, cực tiểu ε - xấp xỉ…

Gần đây, các tác giả của bài báo $[11]$ bằng cách đặc biệt hóa một cách thích hợp đã thống nhất và mở rộng nhiều kết quả đã biết đến nay cho hệ thống bất đẳng thức lồi.

Trong luận văn này, tác giả sẽ trình bày bài toán cận sai số toàn cục cho bất đẳng thức lồi trong hai trường hợp, bất đẳng thức lồi không có ràng buộc và bất đẳng thức lồi có ràng buộc. Bài toán được cho như sau:

Cho $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ là một hàm nửa liên tục dưới.

(1) Cho $S:=\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\le 0\}$ là một tập lồi đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$, tìm dều kiện tồn tại số $\gamma>0$ sao cho

$$\operatorname{dist}(x,S)\le \gamma f(x)_+ \text{, với mọi } x\in\mathbb{R}^n.$$

(2) Cho $C\subset\mathbb{R}^n$ là một tập lồi đóng, khác rỗng và $S=C\cap f^{-1}(-\infty,0]$, tìm điều kiện tồn tại số $\gamma>0$ sao cho

$$\operatorname{dist}(x,S)\le \gamma \max(f(x)_+,\operatorname{dist}(x,C)) \text{, với mọi } x\in\mathbb{R}^n.$$

Luận văn gồm ba chương

Chương 1: Trình bày các kiến thức cơ sở của giải tích lồi về tập afin, tập lồi, nón lồi, hàm lồi, cực trị của hàm lồi, đạo hàm theo phương, dưới vi phân.

Chương 2: Trình bày một số điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của cận sai số đối với bất đẳng thức lồi không có ràng buộc và bất đẳng thức lồi có ràng buộc.

Chương 3: Trình bày một số điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của cận sai số đối với tập compact, nón kem, bất đẳng thức khả vi lồi.

Để hoàn thành luận văn này, tác giả đã nhận được sự giúp đỡ hướng dẫn tận tình của PGS. TS. Trương Xuân Đức Hà. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới cô giáo của mình.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn tới các thầy cô trong Viện Toán Học, Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn được hoàn chỉnh.

Thái Nguyên, tháng 7, năm 2012

Học viên

Nguyễn Đình Long.

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này chúng tôi trình bày khái quát những kiến thức giải tích lồi về tập afin, tập lồi, nón lồi, hàm lồi, cực trị của hàm lồi, đạo hàm theo phương, dưới vi phân. Các kết quả chủ yếu được trích dẫn trong [1], [2], [3].

Sau đây, ta luôn giả thiết $A \subset \mathbb{R}^n$ là một tập con khác rỗng.

1.1. Tập lồi

1.1.1. Tập afin

Tập A là tập afin nếu $\forall a, b \in A$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ thì $\lambda a + (1 - \lambda) b \in A$.

Giao của tất cả các tập afin chứa tập A được gọi là bao afin của tập A, và ký hiệu là $\mathrm{aff}(A)$. Dễ thấy rằng $\mathrm{aff}(A)$ là tập afin nhỏ nhất chứa tập A.

Tập $L \subset \mathbb{R}^n$ là không gian con nếu $\forall a, b \in L$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ thì $\lambda a + \mu b \in L$.

Một tập afin $(n-1)$ chiều trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là siêu phẳng.

1.1.2. Mệnh đề. *Tập $L \subset \mathbb{R}^n$ là không gian con nếu và chỉ nếu L là tập afin chứa* 0.

1.1.3. Tập lồi

Tập A là một tập lồi nếu $\forall a, b \in A$, $\forall \lambda \in [0,1]$ thì $\lambda a + (1 - \lambda) b \in A$.

Bao lồi của một tập $A \subset \mathbb{R}^n$ là giao của tất cả các tập lồi chứa A. Ký hiệu là $\mathrm{co}A$. Dễ thấy rằng đây là tập lồi nhỏ nhất chứa A.

Giao của tất cả các tập lồi đóng chứa A được gọi là bao lồi đóng của tập A, và ký hiệu là $\overline{\mathrm{co}}A$. Dễ thấy rằng $\overline{\mathrm{co}}A$ là tập lồi đóng nhỏ nhất chứa A.

Một điểm a của tập lồi A gọi là điểm trong tương đối nếu với mọi $x \in A$ đều có một số $\alpha > 0$ sao cho $\alpha - \alpha(x-a) \in A$.

Tập hợp các điểm trong tương đối của A ký hiệu là $\mathrm{ri}A$.

Nhận xét: $\mathrm{ri}A$ là tập lồi, mọi tập lồi A đều có $\mathrm{ri}A \neq \varnothing$.

Một điểm biên của tập lồi A là một điểm của bao đóng của A mà không phải là điểm trong tương đối của A.

1.1.4. Ví dụ . Các tập cho sau đây là các tập lồi thường gặp**.**

(1) Trong mặt phẳng hay trong không gian 3 chiều, mọi hình quen biết như đoạn thẳng, hình tam giác, hình chữ nhật, khối lập phương, hình tròn, hình cầu… đều là những tập lồi.

(2) Mọi tập afin.

(3) Hình cầu $B(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\|a - x\right\| \leq r\right\}$.

(4) Hình ellipsoit $E = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left(x-a\right)^T M(x-a) \leq r^2\right\}$ (M là ma trận xác định dương).

(5) Các nửa không gian đóng

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\langle a, x\right\rangle \leq \alpha\right\}; \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\langle a, x\right\rangle \geq \alpha\right\},$$

hay các nửa không gian mở

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\langle a, x\right\rangle < \alpha\right\}; \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\langle a, x\right\rangle < \alpha\right\},$$

trong đó $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.1.5. Mệnh đề . *Cho A là tập lồi. Khi đó*

$$(i)\ \mathrm{int}\,A,\ \mathrm{cl}A \text{ là lồi;}$$