ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN DƯƠNG THÀNH

BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CÁC HỆ TUYẾN TÍNH LỒI ĐA DIỆN CÓ TRỄ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN DƯƠNG THÀNH

BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CÁC HỆ TUYẾN TÍNH LỒI ĐA DIỆN CÓ TRỄ

Chuyên ngành: Giải tích

Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. VŨ NGỌC PHÁT

Thái Nguyên - 2012

Mục lục

MỘT SỐ KÍ HIỆU TOÁN HỌC DÙNG TRONG LUẬN VĂN

- $\mathbb{R}^+$: Tập các số thực không âm.
- $\mathbb{R}^n$: Không gian véc tơ n -chiều với kí hiệu tích vô hướng là $\langle .,. \rangle$ và chuẩn véc tơ là $\|.\|$.
- $\mathbb{R}^{n\times r}$: Không gian các ma trận $(n \times r)$- chiều.
- D: Lân cận mở của 0 trong $\mathbb{R}^n$.
- $C([a,b],\mathbb{R}^n)$: Tập các hàm liên tục trên $[a,b]$ và nhận giá trị trên $\mathbb{R}^n$.
- $L_2([a,b],\mathbb{R}^m)$: Tập các hàm khả tích bậc hai trên $[a,b]$ lấy giá trị trong $\mathbb{R}^m$.
- A^T: Ma trận chuyển vị của ma trận A.
- I: Ma trận đơn vị.
- $\lambda(A)$: Tập tất cả các giá trị riêng của A.
- $\lambda_{\max}(A) := \max\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$.
- $\lambda_{\min}(A) := \min\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$.
- $A > 0$: Ma trận A xác định dương nếu $\langle Ax,x \rangle > 0, \forall x \neq 0$.
- $A \geq 0$: Ma trận A xác định không âm nếu $\langle Ax,x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$: Chuẩn phổ của ma trận A.

LỜI MỞ ĐẦU

Lý Thuyết ổn định là một phần quan trọng của lý thuyết định tính phương trình vi phân. Lý thuyết ổn định được nghiên cứu từ cuối thế kỉ 19 bởi nhà toán học người Nga A. M. Lyapunov. Trải qua hơn một thế kỉ, lý thuyết này ngày càng phát triển mạnh mẽ như một lý thuyết toán học độc lập với nhiều ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như cơ học, sinh thái học, kinh tế, khoa học kĩ thuật...

Hiện nay, lý thuyết ổn định đang phát triển theo hai hướng ứng dụng và lí thuyết, được nhiều nhà toán học trên thế giới và trong nước quan tâm nghiên cứu như: Yoshizawa T., Hale J. K., Verduyn Lunel S. M., Nguyễn Thế Hoàn, Trần Văn Nhung, Vũ Ngọc Phát, Nguyễn Hữu Dư... đã thu được nhiều kết quả, tính chất quan trọng (xem [3, 4, 5]).

Như chúng ta đã biết, có nhiều phương pháp để nghiên cứu lý thuyết ổn định như: phương pháp thứ nhất Lyapunov - phương pháp số mũ đặc trưng, phương pháp thứ hai Lyapunov - phương pháp hàm Lyapunov, phương pháp xấp xỉ... Phương pháp hàm Lyapunov là một phương pháp rất hữu hiệu để nghiên cứu tính chất ổn định của các hệ phương trình vi phân, lý thuyết các hệ điều khiển, các hệ động lực...Trong luận văn này, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định, ổn định hóa hệ phương trình vi phân tuyến tính có trễ bằng phương pháp thứ hai của Lyapunov - phương pháp hàm Lyapunov. Luận văn giới thiệu một cách tổng quan về tính chất ổn định của hệ phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân tuyến tính, bài toán ổn định và bài toán ổn định hóa hệ phương trình vi phân tuyến tính lồi đa diện có trễ.

Bản luận văn gồm phần mở đầu, phần kết luận và 2 chương. Cụ thể là:

Chương 1: Cơ sở toán học.

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở về hệ phương trình vi phân, tính ổn định và ổn định hóa hệ phương trình vi phân, đồng thời trình bày về phương pháp hàm Lyapunov để giải bài toán ổn định của hệ phương trình vi phân. Cuối chương, chúng tôi nêu lên một số tính chất cơ bản về tính ổn định của các hệ phương trình vi phân tuyến tính ôtônôm và hệ phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm và một số bổ đề bổ trợ cho chương sau.

Chương 2: Bài toán ổn định hệ tuyến tính lồi đa diện có trễ.

Trong chương này, chúng tôi trình bày các điều kiện đủ về tính ổn định, ổn định hóa được các hệ phương trình vi phân tuyến tính lồi đa diện có trễ và một số ví dụ minh họa.

Tôi xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn chân thành nhất đến GS.TSKH Vũ Ngọc Phát, người thầy đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Đồng thời, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn tới các thầy cô ở khoa Toán, khoa Sau đại học, trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện giúp đỡ, chỉ bảo tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu tại trường. Cuối cùng, tôi xin cảm ơn những người thân, bạn bè, đồng nghiệp, những người luôn ủng hộ, động viên và là chỗ dựa tinh thần cho tôi trong suốt quá trình học tập, làm việc, nghiên cứu cũng như trong cuộc sống.

Mặc dù bản thân đã cố gắng rất nhiều, nhưng do thời gian thực hiện luận văn không nhiều, kiến thức và trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những hạn chế và sai sót. Tôi rất mong nhận được sự chỉ bảo, góp ý và những ý kiến phản biện của quý thầy cô và bạn đọc.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Chương 1

Cơ sở toán học

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm toán học cơ sở về hệ phương trình vi phân tuyến tính, nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính, tính ổn định và ổn định hóa hệ phương trình vi phân tuyến tính, phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định của hệ phương trình vi phân tuyến tính theo [1 - 4].

1.1. Hệ phương trình vi phân

1.1.1. Hệ phương trình vi phân tổng quát

Định nghĩa 1.1.1. *Hệ phương trình vi phân tổng quát có dạng:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \geq t_0, \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \geq 0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

trong đó $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *với mỗi* $t \geq t_0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Hàm khả vi liên tục $x(t)$ thỏa mãn hệ phương trình (1.1.1) được gọi là nghiệm của hệ phương trình vi phân đó và được kí hiệu là $x(t, x_0)$.
Công thức nghiệm dạng tích phân của hệ (1.1.1) là

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Định lí sau đây khẳng định sự tồn tại duy nhất nghiệm của hệ phương trình vi phân (1.1.1).

Định lý 1.1.1. *(Định lí Picard - Lindeloff)*
Xét hệ phương trình vi phân (1.1.1) *trong đó giả sử* $f : I \times D \to \mathbb{R}^n$ $(I = [t_0, t_0 + b])$ *liên tục theo t và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo x:*

$$\exists K > 0 : \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|, \forall t \geq 0$$

Khi đó, với mỗi $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times D$ *sẽ tìm được một số* $d > 0$ *sao cho hệ phương trình* (1.1.1) *có nghiệm duy nhất trên khoảng* $[x_0 + d, x_0 - d]$. *Hay nói cách khác, qua mỗi điểm* $(t_0, x_0) \in I \times D$ *có một và chỉ một đường cong tích phân chạy qua.*

Định lý 1.1.2. *(Định lí Caratheodory)*
Giả sử $f(t, x)$ *là hàm đo được theo* $t \in I$ *và liên tục theo* $x \in D$. *Nếu tồn tại hàm khả tích* $m(t)$ *trên* $[t_0, t_0 + b]$ *sao cho*

$$\|f(t, x)\| \leq m(t), \forall (t, x) \in I \times D.$$

thì hệ (1.1.1) *có nghiệm trên khoảng* $[t_0, t_0 + \beta]$ *nào đó.*

Với một số giả thiết trên của hàm $f(t, x)$ thì nghiệm $x(t, x_0)$ được xác định trên $[0, +\infty)$.

Đặc biệt, đối với các hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t),$$

trong đó $A(t), g(t)$ là các hàm liên tục thì luôn tồn tại nghiệm $x(t, x_0)$ xác định trên toàn khoảng $[0, +\infty)$.

1.1.2. Hệ phương trình vi phân tuyến tính ôtônôm

Định nghĩa 1.1.2. *Hệ phương trình vi phân tuyến tính ôtônôm có dạng:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \geq 0, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

trong đó A là $n \times n-$ ma trận hằng số, $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục.

Nghiệm của hệ phương trình (1.1.2) được biểu diễn bởi công thức Cauchy

$$x(t, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}g(s))ds, \quad t \geq 0.$$

1.1.3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm

Định nghĩa 1.1.3. *Hệ phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm có dạng:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \geq 0, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

trong đó $A(t)$ là $n \times n-$ ma trận các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^+$, $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục.