ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGÔ THỊ LẬP

DUNG LƯỢNG TOÀN CỤC VÀ DUNG LƯỢNG TƯƠNG ĐỐI TRONG $\mathbb{C}^n$

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

––––––––––

NGÔ THỊ LẬP

DUNG LƯỢNG TOÀN CỤC VÀ DUNG LƯỢNG TƯƠNG ĐỐI TRONG $\mathbb{C}^n$

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: **60.46.01.02**

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH NGUYỄN QUANG DIỆU

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

Mở đầu

Dung lượng là một trong những khái niệm quan trọng của giải tích phức nhiều biến cũng như của lý thuyết đa thế vị.

Khái niệm này dùng để đo các tập hợp mà lý thuyết độ đo cổ điển không nhận biết được. Trong trường hợp một chiều, lý thuyết đa thế vị cổ điển cho ta các định nghĩa tương đương của dung lượng thông qua độ đo cân bằng, hàm Robin, hoặc là hằng số Tchebycheff, ... Tuy nhiên, khi $n \geq 2$, mối liên hệ giữa các đại lượng này là không rõ ràng. Do đó ta có một số định nghĩa khác nhau về dung lượng trong trường hợp nhiều chiều.

Nội dung chính của luận văn là trình bày một số kết quả của Alexander - Taylor về so sánh dung lượng tương đối được định nghĩa bởi Bedford - Taylor với dung lượng toàn cục của Alexander.

Nội dung chính là định lý 2.1.1 cho đánh giá phía trên và phía dưới của T(K) theo C(K, B) dung lượng tương đối của K theo B.
Một hệ quả quan trọng của định lý 2.1.1 là định lý Josefson về tính tương đương giữa tập đa cực địa phương và đa cực toàn cục được trình bày ở chương cuối.

Nội dung chủ yếu của Luận văn được dựa vào tài liệu [1]. Luận văn bao gồm phần Mở đầu, ba chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị. Trước hết trong mục 1.1 trình bày khái quát về hàm đa điều hòa dưới. Trong các mục tiếp theo giới thiệu toán tử Monge - Ampère phức, dung lượng toàn cục T(K) và dung lượng tương đối C(K, D).

Chương 2. So sánh dung lượng toàn cục và dung lượng tương đối trong $\mathbb{C}^n$ và việc chứng minh định lý so sánh dung lượng.

Chương 3. Áp dụng về tập đa cực .Mục đích của chương này là đưa ra một chứng minh ngắn gọn hơn của định lý Josefson về tính tương đương giữa tập đa cực địa phương và toàn cục.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và nhiệt tình chỉ bảo của Giáo sư Nguyễn Quang Diệu, Đại học sư phạm Hà Nội. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Đại học sư phạm, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K18B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm Luận văn.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên Luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2012

Tác giả

Ngô Thị Lập

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Hàm đa điều hoà dưới

1.1.1 Hàm điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1.1. *Giả sử X là không gian tôpô. Hàm $u : X \to [-\infty, +\infty)$ gọi là nửa liên tục trên trên X nếu với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$ tập*

$$X_\alpha = \{x \in X : u(x) < \alpha\}$$

là mở trong X. Hàm $v : X \to (-\infty, +\infty]$ gọi là nửa liên tục dưới trên X nếu $-v$ là nửa liên tục trên trên X.

Định nghĩa trên tương đương với định nghĩa mang tính địa phương sau: *Giả sử $u : X \to [-\infty, +\infty)$. Ta nói hàm u là nửa liên tục trên tại $x \in X$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ tồn tại lân cận U_{x_0} của x_0 trong X sao cho $\forall x \in U_{x_0}$ ta có:*

$$u(x) < u(x_0) + \varepsilon, \qquad u(x_0) \neq -\infty$$
$$u(x) < -\frac{1}{\varepsilon}, \qquad u(x_0) = -\infty$$

Hàm u gọi là nửa liên tục trên trên X nếu u nửa liên tục trên tại mọi $x_0 \in X$.

Mặt khác nếu ta cho định nghĩa sau: Giả sử $E \subset X$ và $u : E \to [-\infty, +\infty)$ là hàm trên E. Giả sử $x_0 \in \overline{E}$. Ta định nghĩa

$$\lim_{x \to x_0} \sup_{x \in E} u(x) = \inf\{\sup\,\{u(y) : y \in V\}\}$$

ở đó inf lấy trên các V chạy qua các lân cận của x_0. Khi đó có thể thấy rằng hàm $u : X \to [-\infty, +\infty)$ là nửa liên tục trên tại $x_0 \in X$ nếu $\lim_{x \to x_0} \sup\ u(x) \leq u(x_0)$

Định nghĩa 1.1.2. *Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{C}$. Hàm $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ gọi là điều hòa dưới trên Ω nếu nó nửa liên tục trên trên Ω và thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình trên Ω, nghĩa là với mọi $\omega \in \Omega$ tồn tại $\varrho > 0$ sao cho với mọi $0 \leq r < \varrho$ ta có*

$$u(\omega) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega + re^{it})dt. \tag{1.1}$$

Chú ý: Với định nghĩa trên thì hàm đồng nhất $-\infty$ trên Ω được xem là hàm điều hòa dưới trên Ω. Ta kí hiệu tập các hàm điều hòa dưới trên Ω là $SH(\Omega)$. Sau đây là các ví dụ đáng chú ý về hàm điều hòa dưới.

Bổ đề 1.1.3. *Nếu $f : \Omega \to C$ là hàm chỉnh hình trên Ω thì $\log |f|$ là hàm điều hòa dưới trên Ω.*

Chứng minh. Trường hợp $f \equiv 0$ trên Ω thì kết quả là rõ ràng. Giả sử $f \not\equiv 0$ trên Ω, Khi đó rõ ràng $\log |f|$ là hàm nửa liên tục trên trên Ω. Giả sử $\omega \in \Omega$. Nếu $f(\omega) \neq 0$ thì chọn $\varrho > 0$ sao cho $f \neq 0$ trên $B(\omega, \varrho) = \{z \in \Omega : |z - \omega| < \varrho\}$ Khi đó $\log |f|$ là hàm điều hòa trên $B(\omega, \varrho) = \{z \in \Omega : |z - \omega| < \varrho\}$ nên (1.1) được thỏa mãn với dấu đẳng thức. Trường hợp $f(\omega) = 0$. Khi đó $\log |f(\omega)| = -\infty$ và do đó (1.1) luôn đúng. □

Bổ đề 1.1.4. *Giả sử u, v là các hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω trong $\mathbb{C}$. Khi đó:*
(i) $\max(u, v)$ *là hàm điều hòa dưới trên Ω.*
(ii) Tập các hàm điều hòa dưới trên Ω là một nón, nghĩa là nếu $u, v \in SH(\Omega)$ và $\alpha, \beta > 0$ thì $\alpha u + \beta v$ cũng thuộc $SH(\Omega)$.

Định lý 1.1.5. *Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên miền bị chặn Ω trên $\mathbb{C}$. Khi đó:*

(i) Nếu u đạt cực đại toàn thể tại một điểm trên Ω thì u là hằng số trên Ω.

(ii) Nếu $\lim_{z \to \varsigma} \sup\ u(z) \leq 0$ đối với mọi $\varsigma \in \partial\Omega$ thì $u \leq 0$ trên Ω.

Chứng minh. (i) Giả sử u nhận giá trị cực đại M tại điểm $z_0 \in \Omega$. Đặt

$$A = \{z \in \Omega : u(z) < M\} \qquad ; \qquad B = \{z \in \Omega : u(z) = M\}$$

Khi đó A là tập mở vì u là hàm nửa liên tục trên. Từ bất đẳng thức dưới trung bình ta thấy B cũng là tập mở. Ta có $\Omega = A \cup B, A \cap B = \varnothing$. Do đó hoặc $A = \Omega$ hoặc $B = \Omega$. Nhưng theo giả thiết $B \neq \varnothing$ nên $B = \Omega$ và (i) được chứng minh.
(ii) Mở rộng u lên $\overline{\Omega}$ nhờ đặt $u(\varsigma) = \limsup\limits_{z \to \varsigma} u(z)$, $(\varsigma \in \partial\Omega)$. Do $\overline{\Omega}$ là tập compact nên u đạt cực đại tại $\omega \in \overline{\Omega}$. Nếu $\omega \in \partial\Omega$ thì do giả thiết $u(\omega) \leq 0$. Do đó $u \leq 0$ trên Ω.
Trường hợp $\omega \in \Omega$ thì theo (i) u là hằng số trên Ω. Do đó nó hằng số trên $\overline{\Omega}$ và vậy thì $u \leq 0$ trên Ω. □

Sau đây là tiêu chuẩn nhận biết khi nào một hàm nửa liên tục trên là hàm điều hòa dưới.

Định lý 1.1.6. *Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{C}$ và u là hàm nửa liên tục trên Ω. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*
(i) u là hàm điều hòa dưới trên Ω.
(ii) Với mọi $\omega \in \Omega$, tồn tại $\varrho > 0$ sao cho $\overline{\Delta}(\omega, \varrho > 0) \subset \Omega$ và với mọi $0 \leq r < \varrho, 0 \leq t < 2\pi$ ta có:

$$u(\omega + re^{it}) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 - 2\varrho r cos(\theta - t) + r^2} u(\omega + \varrho e^{i\theta}) d\theta.$$

Ở đó $\overline{\Delta}(\omega, \varrho > 0) = \{z \in \Omega : |z - \omega| \leq \varrho\}$ là đĩa đóng tâm ω bán kính ϱ.
(iii) Với mọi miền D compact tương đối trong Ω và h là hàm điều hòa trên D, liên tục trên $\overline{D}$ thỏa mãn:

$$\limsup_{z \to \varsigma} (u - h)(z) \leq 0 \qquad (\varsigma \in \partial D)$$

ta có $u \leq h$ trên D.

Hệ quả 1.1.7. *Nếu u là hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω và nếu $\overline{\Delta}(\omega, \varrho) \subset \Omega$ thì*

$$u(\omega) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\omega + \varrho e^{i\theta}) d\theta.$$

Định lý 1.1.8. *Giả sử $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$, Khi đó u là hàm điều hòa dưới trên Ω khi và chỉ khi $\Delta u \geq 0$ trên Ω, ở đó $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ là Laplace của u.*

Chứng minh. Giả sử $\Delta u \geq 0$ trên Ω. Lấy D là miền compact tương đối trong Ω và h là hàm điều hòa trên D, liên tục trên $\overline{D}$ sao cho

$$\limsup_{z\to\varsigma}(u-h)(z) \leq 0 \qquad (\varsigma \in \partial D).$$

Với $\varepsilon > 0$, xác định

$$v_\varepsilon(z) = \begin{cases} u(z) - h(z) + \varepsilon|z|^2 & \text{nếu } z \in D \\ \varepsilon|z|^2 & \text{nếu } z \in \partial D. \end{cases}$$

Khi đó, v_ε nửa liên tục trên $\overline{D}$ nên nó đạt cực đại trên $\overline{D}$. Tuy nhiên do $\Delta v_\varepsilon = \Delta u + 4\epsilon > 0$ trên D nên v_ε đạt cực đại trên ∂D. Do đó $u - h \leq \sup_{\partial D} \varepsilon|z|^2$ trên D. Cho $\varepsilon \to 0$ ta được $u \leq h$ trên D và do đó u điều hòa dưới trên D.

Ngược lại, giả sử u là hàm điều hòa dưới trên Ω. Giả thiết tại $u \in \Omega$ ta có $\Delta u(\omega) < 0$. Do đó có $\varrho > 0$ sao cho $\Delta u \leq 0$ trên $\Delta(\omega, \varrho)$. Do đó u là hàm điều hòa trên $\Delta(\omega, \varrho)$. Vậy $\Delta u(\omega) = 0$ và gặp mâu thuẫn. Do đó $\Delta u \geq 0$ và định lí được chứng minh. □

Định lý 1.1.9. *Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω_1 và là hàm điều hòa dưới trên tập mở $\Omega_2 \subset \Omega_1$. Giả thiết $\limsup_{z\to\varsigma} \ v(z) \leq u(\varsigma)$, với mọi $\varsigma \in \Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Khi đó hàm $\widetilde{u}$ xác định trên Ω_1:*

$$\widetilde{u} = \begin{cases} \max(u, v) & \textit{trên } \Omega_2 \\ u & \textit{trên } \Omega_1 \setminus \Omega_2. \end{cases}$$

là điều hòa dưới trên Ω_1.

Chứng minh. Từ điều kiện $\limsup_{z\to\varsigma} \ v(z) \leq u(\varsigma)$, đối với mọi $\varsigma \in \Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ suy ra hàm $\widetilde{u}$ nửa liên tục trên trên Ω_1. Dễ thấy $\widetilde{u}$ thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình tại mọi $\omega \in \Omega_2$. Do $\widetilde{u} \geq u$ trên Ω_1 nên $\widetilde{u}$ cũng thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình tại mọi $\omega \in \Omega_1 \setminus \Omega_2$. Định lí được chứng minh. □

Định lý 1.1.10. *Giả sử $\{u\}$ là dãy giảm các hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω trên $\mathbb{C}$ và $u = \lim_{n\to\infty} u_n$. Khi đó u là điều hòa dưới trên Ω.*

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng minh u nửa liên tục trên trên Ω. Với mỗi $\alpha \in R$, tập

$$\{z \in \Omega : u(z) < \alpha\} = \bigcup_n^\infty \{z \in \Omega : u(z) < \alpha\}.$$

Do đó nó là tập mở. Vậy u nửa liên tục trên trên Ω. Do mỗi u_n thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình nên dùng định lí hội tụ đơn điệu suy ra u cũng thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình trên Ω. Do đó u là điều hòa dưới trên Ω. $\square$

Định lý 1.1.11. *Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên miền Ω với $u \not\equiv -\infty$ trên Ω. Khi đó u khả tích địa phương trên Ω, nghĩa là với mọi $K \Subset \Omega$ ta có*

$$\int\limits_K |u| dV < +\infty. \tag{1.2}$$

Chứng minh. Do định lí Heine-Borel chỉ cần chứng minh với mỗi $\omega \in \Omega$ tồn tại $\varrho > 0$ sao cho

$$\int\limits_{\Delta(\omega,\varrho)} |u| dV < \infty.$$

Đặt $A = \{\omega \in \Omega\}$ tại ω có tính chất (1.2) và $B = \Omega \setminus A$. Ta chứng minh A, B là các tập mở trên Ω và $u = -\infty$ trên B. Do đó $B = \varnothing$ và định lí được chứng minh.

Giả sử $\omega \in A$. Chọn $\varrho > 0$ sao cho (1.2) đúng. Với mỗi $\widetilde{u} \in \Delta(\omega, \varrho)$, đặt $\widetilde{\varrho} = \varrho - |\widetilde{\omega} - \omega|$. Khi đó $\Delta(\widetilde{\omega}, \widetilde{\varrho}) \subset \Delta(\omega, \varrho)$. Do đó

$$\int\limits_{\Delta(\widetilde{\omega},\widetilde{\varrho})} |u| dV < \infty.$$

Vậy $\Delta(\omega, \varrho) \subset A$ và A là tập mở. Giả sử $\omega_1 \in B$. Chọn $\varrho > 0$ sao cho $\overline{\Delta}(\omega_1, 2\varrho) \subset \Omega$. Do $\omega_1 \in B$ nên

$$\int\limits_{\Delta(\omega_1,\varrho)} |u| dV = \infty.$$

Với mỗi $\omega' \in \Delta(\omega_1, \varrho)$, đặt $\varrho' = \varrho + |\omega' - \omega_1|$. Khi đó $\Delta(\omega_1, \varrho) \subset \Delta(\omega', \varrho')$ và do u bị chặn trên trên $\overline{\Delta}(\omega', \varrho')$ nên

$$\int\limits_{\Delta(\omega',\varrho')} |u| dV = -\infty.$$

Ta có bất đẳng thức: