ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHAN THỊ HIỀN

DÃY CHÍNH QUY SUY RỘNG VÀ TÍNH HỮU HẠN CỦA TẬP CÁC IĐÊAN NGUYÊN TỐ LIÊN KẾT CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHAN THỊ HIỀN

DÃY CHÍNH QUY SUY RỘNG VÀ TÍNH HỮU HẠN CỦA TẬP CÁC IĐÊAN NGUYÊN TỐ LIÊN KẾT CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 60.46.05

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN THỊ DUNG

THÁI NGUYÊN – 2012

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn2*

Mục lục

Trang

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành nhờ sự hướng dẫn nhiệt tình và nghiêm khắc của Cô giáo TS. Nguyễn Thị Dung. Cô đã giành nhiều thời gian, công sức chỉ bảo tôi trong suốt quá trình thực hiện đề tài và tạo mọi điều kiện cho tôi hoàn thành luận văn này. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Cô cùng gia đình.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban lãnh đạo trường Đại học sư phạm Thái Nguyên, lãnh đạo khoa Toán, lãnh đạo khoa Sau đại học của Trường đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập của mình.

Tôi xin chân thành cảm ơn sự tận tâm và nhiệt tình của các quý Thầy cô tham gia giảng dạy cho lớp Cao học chuyên ngành Toán khóa 18.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn các bạn bè, những người thân yêu trong gia đình đã luôn cho tôi niềm tin và động lực để tôi học tập tốt.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2012

Học viên

Phan Thị Hiền

Mở đầu

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán, địa phương, Noether với iđêan cực đại duy nhất $\mathfrak{m}$. Cho M là R-môđun hữu hạn sinh với chiều $\dim M = d$. *Dãy chính quy* là một trong những dãy cơ bản của Đại số giao hoán mà thông qua đó người ta có thể định nghĩa khái niệm *độ sâu*-một bất biến rất quan trọng để nghiên cứu cấu trúc của môđun. Khái niệm dãy chính quy và độ sâu đóng một vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu cấu trúc vành và môđun, chẳng hạn một dãy chính quy luôn là một phần của hệ tham số, độ sâu $\operatorname{depth} M \leqslant \dim M$ và nếu $\operatorname{depth} M = \dim M$ thì M được gọi là môđun Cohen-Macaulay. Đặc biệt, độ sâu r của M trong I chính là số nguyên nhỏ nhất sao cho môđun đối đồng điều địa phương $H_I^r(M)$ không triệt tiêu.

Đã có nhiều nhà toán học nghiên cứu và mở rộng các khái niệm trên để cho ta những lớp môđun mới. Trước tiên, N. T. Cường, N. V. Trung và P. Schenzel [4] đã giới thiệu khái niệm *dãy chính quy lọc (f-dãy)*, và lớp môđun thỏa mãn mọi hệ tham số đều là f-dãy được gọi là *f-môđun*. Sau đó, liên quan đến các kết quả trên, khái niệm *độ sâu lọc (f-độ sâu)*, ký hiệu là f-depth(I, M), được giới thiệu bởi Lu-Tang [10] như là cận trên của các độ dài của một f-dãy cực đại của M trong I và đó cũng là số nguyên r nhỏ nhất sao cho môđun đối đồng điều địa phương $H_I^r(M)$ không là môđun Artin, khi $\operatorname{Supp}(M/IM) \nsubseteq \{\mathfrak{m}\}$. Tiếp theo, L. T. Nhàn [14] đã giới thiệu khái niệm dãy chính quy suy rộng như là một sự mở rộng của dãy chính quy và dãy chính quy lọc: Một dãy các phần tử $(x_1, \ldots, x_r)$ trong $\mathfrak{m}$ được gọi là *M-dãy chính quy suy rộng* nếu $x_i \notin \mathfrak{p}$, với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M)$, thỏa mãn $\dim R/\mathfrak{p} > 1$, với mọi $i = 1, \ldots, r$. Chú ý rằng khi $\dim(M/IM) > 1$ tất cả các dãy chính quy suy rộng cực đại của M trong I đều có chung độ dài và độ dài chung đó được gọi là *độ sâu suy rộng*, ký hiệu là $\operatorname{gdepth}(I; M)$. Rõ ràng, mọi dãy chính quy là dãy chính quy lọc, và mọi dãy chính quy lọc là dãy chính quy suy rộng, nhưng điều ngược lại không đúng. Do đó ta có

$$\operatorname{depth}(I, M) \leqslant f\text{-}\operatorname{depth}(I, M) \leqslant \operatorname{gdepth}(I, M).$$

Nhiều tính chất của dãy chính quy suy rộng và độ sâu suy rộng tương tự các tính chất của dãy chính quy và độ sâu cũng được chứng minh. Đặc biệt, độ sâu suy rộng $\operatorname{gdepth}(I; M)$ chính là số nguyên r nhỏ nhất sao cho môđun đối đồng điều địa phương $H_I^r(M)$ có tập giá vô hạn, khi $\dim(M/IM) > 1$. Hơn nữa, thông qua khái niệm dãy chính quy suy rộng và độ sâu suy rộng, một số thông tin về tính hữu hạn của tập

$$\bigcup_{n_1,\ldots,n_r \in \mathbb{N}} \operatorname{Ass}(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r})M)$$

và tính chất hữu hạn của tập iđêan nguyên tố liên kết của môđun đối đồng điều địa phương cũng được chứng minh. Chú ý rằng, tính chất hữu hạn của tập $\operatorname{Ass}(H_I^i(M))$ được nhiều nhà toán học quan tâm. Đã có giả thuyết rằng tập $\operatorname{Ass}(H_I^i(M))$ chỉ có hữu hạn các iđêan nguyên tố liên kết, với mọi iđêan I của R và với mọi $i \geqslant 0$. Tuy nhiên, giả thuyết trên chỉ được chứng minh là đúng trong một số trường hợp đặc biệt về vành (xem [6], [7]) và đã có những phản ví dụ chứng tỏ rằng giả thuyết trên là sai trong trường hợp vành địa phương và không địa phương (xem [8], [16]).

Mục đích của luận văn này là trình bày và chứng minh lại chi tiết toàn bộ nội dung bài báo *"On generalized regular sequences and the finiteness for associated primes of local cohomology modules"* của Lê Thanh Nhàn đăng trên tạp chí *Communication in Algebra,* năm 2005 và một phần bài báo *"The f-depth of an ideal on a module"* của Lu-Tang đăng trên tạp chí *Proceedings of the American Mathematical Society*.

Luận văn được chia thành hai chương, không có chương chuẩn bị. Các kiến thức cơ sở dùng trong luận văn sẽ được nhắc lại xen kẽ trong khi trình bày nội dung hai bài báo. Chương 1 dành để nghiên cứu về dãy chính quy

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn6*

và độ sâu, dãy chính quy lọc và độ sâu lọc, dãy chính quy suy rộng và độ sâu suy rộng cùng một số đặc trưng của chúng. Chương 2 trình bày hai kết quả hữu hạn: Nếu $(x_1, \ldots, x_r)$ là một dãy chính quy suy rộng của M thì tập $\bigcup\limits_{n_1,\ldots,n_r\in\mathbb{N}} \mathrm{Ass}(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r})M)$ là hữu hạn và tập các iđêan nguyên tố liên kết $\mathrm{Ass}(H_I^i(M))$ là tập hữu hạn với mọi $i \leqslant \mathrm{gdepth}(I, M)$. Đặc biệt, chương này cũng trình bày một chứng minh sơ cấp cho tính chất môđun đối đồng điều địa phương đầu tiên không Artin $H_I^i(M)$ chỉ có hữu hạn các iđêan nguyên tố liên kết. Kết quả này tương tự như kết quả của Brodmann và Faghani [2] cho tính hữu hạn của tập $\mathrm{Ass}(H_I^i(M))$, nhưng ở đây, tính chất hữu hạn sinh được thay thế bởi tính Artin.

Phần kết luận của luận văn tổng kết lại các kết quả đã trình bày.

Với mong muốn là trình bày lại một số nội dung quan trọng về các dãy chính quy và ứng dụng của nó trong việc nghiên cứu các lớp môđun quan trọng trong Đại số giao hoán, nhưng, vì điều kiện thời gian, năng lực và kinh nghiệm của bản thân còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong muốn nhận được những sự góp ý quý báu của các quý thầy cô cùng độc giả quan tâm để luận văn được hoàn thiện hơn.

Chương 1

Một số mở rộng của dãy chính quy

Trong toàn bộ chương này, ta luôn ký hiệu $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán, địa phương, Noether, A là R-môđun Artin và M là R-môđun hữu hạn sinh với chiều Krull $\dim M = d$. Chương này để chứng minh chi tiết một số kết quả về dãy chính quy lọc được đưa ra bởi Cường-Shenzel-Trung [4] và độ sâu lọc được giới thiệu bởi Lu-Tang [10], dãy chính quy suy rộng và độ sâu suy rộng được đưa ra bởi L. T. Nhàn [14] và mối quan hệ của chúng với các khái niệm dãy chính quy và độ sâu quen biết. Một số kiến thức được dùng trong các nội dung tiếp theo như: Hàm tử mở rộng, môđun đối đồng điều địa phương,... cũng được nhắc lại ở chương này.

1.1 Dãy chính quy và độ sâu của môđun

Dãy chính quy là một trong những dãy cơ bản của đại số giao hoán mà thông qua đó người ta có thể định nghĩa khái niệm độ sâu - một bất biến rất quan trọng để nghiên cứu cấu trúc của môđun (xem [12]).

1.1.1 Hàm tử mở rộng

Mục này dành để nhắc lại khái niệm và các tính chất của môđun Ext thường được dùng trong luận văn.

Định nghĩa 1.1.1. Cho M, N là các R-môđun và $n \geqslant 0$ là một số tự nhiên. Môđun dẫn xuất phải thứ n của hàm tử $\mathrm{Hom}(-, N)$ ứng với M được gọi là môđun *mở rộng thứ n* của M và N và được ký hiệu là $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$.

Cụ thể, để xây dựng $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$ ta lấy một giải xạ ảnh của M

$$\ldots \to P_2 \xrightarrow{u_2} P_1 \xrightarrow{u_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0.$$

Tác động hàm tử $\mathrm{Hom}(-, N)$ vào dãy khớp trên ta có đối phức

$$0 \to \mathrm{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{u_1^*} \mathrm{Hom}(P_1, N) \xrightarrow{u_2^*} \mathrm{Hom}(P_2, N) \to \ldots$$

Khi đó $\mathrm{Ext}_R^n(M, N) = \mathrm{Ker}\, u_{n+1}^* / \mathrm{Im}\, u_n^*$ là môđun đối đồng điều thứ n của đối phức trên (môđun này không phụ thuộc vào việc chọn giải xạ ảnh của M).

Mệnh đề 1.1.2. *(i)* $\mathrm{Ext}_R^0(M, N) \cong \mathrm{Hom}(M, N)$.

(ii) Nếu M là xạ ảnh hoặc N là nội xạ thì $\mathrm{Ext}_R^n(M, N) = 0$ với mọi $n \geqslant 1$.

(iii) Nếu $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ là dãy khớp ngắn thì tồn tại các đồng cấu nối $\mathrm{Ext}_R^n(M, N'') \to \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, N')$, với mỗi $n \geqslant 0$ sao cho ta có dãy khớp dài

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Hom}(M, N') \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M, N'') \to \mathrm{Ext}_R^1(M, N') \\ &\to \mathrm{Ext}_R^1(M, N) \to \mathrm{Ext}_R^1(M, N'') \to \mathrm{Ext}_R^2(M, N') \to \ldots \end{aligned}$$

(iv) Nếu $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ là dãy khớp ngắn thì tồn tại các đồng cấu nối $\mathrm{Ext}_R^n(M', N) \to \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M'', N)$, với mỗi $n \geqslant 0$ sao cho ta có dãy khớp dài

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Hom}(M'', N) \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M', N) \to \mathrm{Ext}_R^1(M'', N) \\ &\to \mathrm{Ext}_R^1(M, N) \to \mathrm{Ext}_R^1(M', N) \to \mathrm{Ext}_R^2(M'', N) \to \ldots \end{aligned}$$

Các kết quả sau cho ta tính chất hữu hạn sinh của môđun Ext và tính chất giao hoán giữa môđun Ext với hàm tử địa phương hóa.

Mệnh đề 1.1.3. *(i) Nếu M, N là hữu hạn sinh thì $\operatorname{Ext}_R^n(M, N)$ là hữu hạn sinh với mọi n.*

(ii) Nếu S là tập đóng nhân của R thì ta có đẳng cấu

$$S^{-1}(\operatorname{Ext}_R^n(M, N)) \cong \operatorname{Ext}_{S^{-1}R}^n(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

trong đó S^{-1} là hàm tử địa phương hóa. Đặc biệt,

$$(\operatorname{Ext}_R^n(M, N))_{\mathfrak{p}} \cong \operatorname{Ext}_{R_{\mathfrak{p}}}^n(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}).$$

1.1.2 Môđun đối đồng điều địa phương

Trước hết, ta nhắc lại khái niệm môđun đối đồng điều địa phương của một môđun tùy ý.

Định nghĩa 1.1.4. Cho I là một iđêan của R và M là một R-môđun. Môđun *đối đồng điều địa phương thứ i* của M ứng với iđêan I, ký hiệu là $H_I^i(M)$, được định nghĩa bởi

$$H_I^i(M) = R^i(\Gamma_I(M))$$

trong đó $R^i(\Gamma_I(M))$ là môđun dẫn suất phải thứ i của hàm tử I-xoắn $\Gamma_I(-)$ ứng với M.

Cho I là một iđêan của R. Sau đây là các tính chất δ-hàm tử, tính chất triệt tiêu, không triệt tiêu và tính chất Artin của môđun đối đồng điều địa phương.

Định lý 1.1.5. *(i) Cho $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ là một dãy khớp các R-môđun. Khi đó, với mọi $i \in \mathbb{N}$ ta có dãy khớp dài*

$$\begin{aligned} 0 &\to H_I^0(L) \xrightarrow{H_I^0(f)} H_I^0(M) \xrightarrow{H_I^0(g)} H_I^0(N) \\ &\to H_I^1(L) \xrightarrow{H_I^1(f)} H_I^1(M) \xrightarrow{H_I^1(g)} H_I^1(N) \to \dots \\ &\to H_I^i(L) \xrightarrow{H_I^i(f)} H_I^i(M) \xrightarrow{H_I^i(g)} H_I^i(N) \to H_I^{i+1}(L) \to \dots \end{aligned}$$

(ii) $H_I^i(M) = 0$ với mọi $i > d$ và $H_{\mathfrak{m}}^d(M) \neq 0$.