BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC -ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

NGÔ TRỌNG TOÀN

XẤP XỈ NGHIỆM BÀI TOÁN BÙ ĐƠN ĐIỆU PHI TUYẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60 46 0112**

Giáo viên hướng dẫn:
GS.TS NGUYỄN BƯỜNG

THÁI NGUYÊN, 2012

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TS Nguyễn Bường. Qua đây, tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình, GS.TS. Nguyễn Bường, người đã đưa ra đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của tác giả. Đồng thời tác giả cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán - Tin học trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện cho tác giả về tài liệu và thủ tục hành chính để tác giả hoàn thành bản luận văn này. Tác giả cũng gửi lời cảm ơn đến gia đình, BGH trường THPT Yên Thủy B - Hòa Bình và các bạn trong lớp Cao học K4C, đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn.

Mục lục

Mở đầu

Nhiều vấn đề thuộc lĩnh vực toán học khác nhau như giải tích lồi, phương trình toán lý quy hoạch toán học, lý thuyết trò chơi, mô hình kinh tế ... có thể phát biểu dưới dạng bài toán sau.

Xét bài toán bù NCP(F)

$$x \geq 0, F(x) \geq 0, x^T F(x) = 0, \tag{1}$$

ở đây $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là một hàm cho trước. Trong nhiều bài báo gần đây, bài toán này xem như là bài toán cực tiểu với mục đích áp dụng phương pháp tối ưu để giải (1).

Chẳng hạn, Mangasarian và Solodov [8] giới thiệu bài toán cực tiểu không ràng buộc với tính chất là : Mọi cực tiểu toàn cục của hàm mục tiêu đều là nghiệm của (1). Yamashita và Fukushima [11] chứng minh rằng: Mỗi điểm dừng của hàm Mangasarian và Solodov đều là cực tiểu toàn cục và do đó nó là nghiệm của (1) nếu F khả vi liên tục và F' xác định dương $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Trong luận văn này sử dụng công thức được giới thiệu trong [4] để giải lại (1) như một bài toán tối ưu không ràng buộc.

Bố cục luận văn gồm có hai chương :

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này, tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về giải tích hàm, toán tử đơn điệu,phương pháp lặp Newtơn giải phương trình phi tuyến, thuật toán giảm cho bài toán phi tuyến, thuật toán Maps.

Chương 2: Bài toán bù đơn điệu phi tuyến. Trong chương này luận văn phát biểu bài toán bù đơn điệu, chứng minh định lý tương đương, trình bày phương pháp xấp xỉ của Mangasasian và Solodov. Phần cuối chúng tôi trình bày một số kết quả thực nghiệm số của bài toán.

Do thời gian có hạn và khối lượng kiến thức lớn, chắc chắn bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp, tác giả xin chân thành cảm ơn!

Chương 1

Một số kiến thức cơ sở

1.1 Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1. *Giả sử E là không gian véc tơ trên trường K. Tích vô hướng trên E là ánh xạ $\varphi : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathrm{K}$ thỏa mãn*

(i) $\varphi(x, x) > 0$ *nếu* $x \neq 0; \varphi(x, x) = 0$ *nếu* $x = 0$.

(ii) $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$.

(iii) $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$.

(iv) $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$.

Kí hiệu $\varphi(x, y) = \langle x,\, x\rangle$. *Khi đó*

$$||x|| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}.$$

Xác định một chuẩn trên E.

Định nghĩa 1.2. *Không gian véc tơ E cùng với tích vô hướng trên nó gọi là không gian tiền Hilbert.*

Một không gian tiền Hilbert đủ được gọi là không gian Hilbert.

Một không gian tiền Hilbert không đủ bao giờ cũng có thể bổ sung thành một không gian Hilbert.

Định nghĩa 1.3. *Hai véc tơ $x, y \in E$ gọi là trực giao với nhau, kí hiệu $x \perp y$,nếu $\langle x,\, x\rangle = 0$. Véc tơ x gọi là trực giao với tập $M \subset E$ nếu x trực giao với mọi véc tơ của M. Tập $M^{\perp} = \{x | \langle x,\, x\rangle = 0, \forall y \in M\}$ gọi là phần bù trực giao của M.*

Bổ đề 1.1. *$M^{\perp}$ là không gian đóng của E.*

Định nghĩa 1.4. *Cho một toán tử tuyến tính liên tục A trong không gian Hilbert E, tồn tại một toán tử duy nhất A^* để cho*

$$< \mathrm{Ax}, y >=< x, A^* y > .$$

Toán tử A^* gọi là toán tử liên hợp của A.

Một số tính chất của toán tử liên hợp :
(i) $(A^*)^* = A$.
(ii) $(A^* + B^*) = A^* + B^*, (\alpha A)^* = \alpha A^*$.
(iii) $(AB)^* = B^* A^*$.
(iv) $N(A) = \overline{\mathrm{Re}\ (A^*)}^{\perp}, N(A^*) = \overline{\mathrm{Re}\ (A)}^{\perp}$.

Định lí 1.1. *Cho M là một không gian con đóng của một không gian Hilbert E bất kì phần tử của E cũng biểu diễn duy nhất dưới dạng.*

$$x = y + z \text{ với } y \in M, z \in M^{\perp},$$

trong đó y là phần tử của M gần x nhất, tức là

$$\|x - y\| \le \|x - u\|, \forall u \in M.$$

Đặt $P(x) = y$, P gọi là toán tử chiếu lên M.

Cho không gian Affine định nghĩa bởi $\mathrm{Ax} = q, A \in \mathbb{R}^{n\times m}, q \in \mathbb{R}^m$, chúng ta định nghĩa phép chiếu $P_{A,q}$ bởi

$$x \mapsto P_{A,q}x = \arg\min \{\|\omega - x\| \,|A\omega = q\}, P_A = P_{A,0}.$$

Bổ đề 1.2. *Với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ và $q \in \mathbb{R}^m$,thì $P_{A,q}x = P_A x + P_{A,q}0$.*

Chứng minh. $\omega^1 = P_{A,q^1}x^1$ và $\omega^2 = P_{A,q^2}x^2$. Từ định nghĩa của phép chiếu, ta có $A\omega^i = q^i, x^i - \omega^i \perp N(A), i = 1, 2$. Từ đó ta có $\forall\lambda \in \mathbb{R}, A(\omega^1 + \lambda\omega^2) = q^1 + \lambda q^2$ và $x^1 + \lambda x^2 - (\omega^1 + \lambda\omega^2) \perp N(A)$. Điều đó có nghĩa rằng $\omega^1 + \lambda\omega^2 = P_{A,q^1+\lambda q^2}(x^1 + \lambda x^2)$. □

Bổ đề 1.3. *Giả sử $D \in \mathbb{R}^n$ sao cho $d \in D$ thì $d \approx 1$. Khi đó với mọi $y \in \mathbb{R}^n, q \in R(A), d \in D$ ta có*

$$\begin{aligned} &P_{AD,q}0 = O(\|q\|), \\ &P_{AD,q}y = O(\|q\|) + O(\|y\|), \\ &\|DP_{AD}Dy\| \approx \|P_A y\| . \end{aligned}$$

Chứng minh. Giả sử A^+ là ma trận nghịch đảo của A, nghĩa là A^+ là ma trận $(n \times m)$ sao cho $AA^+q = q, q \in R(A)$. Khi đó ta có

$$\min imize \{\|x - y\| \,|ADz = q\}.$$

Suy ra

$$\|P_{AD,q}y - y\| \leq \left\|D^{-1}A^+q\right\| + \|y\|.$$

Do đó

$$P_{AD,q}0 = O(\|q\|).$$

$$P_{AD,q}y = O(\|q\|) + O(\|y\|).$$

Từ kết quả trên ta cũng có $\forall z = \mathbb{R}^n, DPADDz = O(\|z\|)$.
Lấy $z = P_A y = y - A^T\omega, \omega \in \mathbb{R}^m$ ta được

$$P_{AD}Dz = P_{AD}Dy - P_{AD}DA^T\omega = P_{AD}Dy,$$

$$DP_{AD}Dy = O(\|P_A y\|).$$

Bằng cách tương tự, với thay đổi $\overline{y} = Dy$, ta có $D_A y = O(\|DP_{AD}Dy\|)$. Vậy $\|DP_{AD}dy\| \approx \|P_A y\|$. □

1.2 Toán tử đơn điệu

Cho X là không gian Banach phản xạ với không gian liên hợp của nó là X^*. Cả hai có chuẩn được ký hiệu là $\| \, . \, \|$ và giá trị của phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ tại điểm $x \in X$ được ký hiệu bởi $\langle x^*, x\rangle$. Cho toán tử A với miền xác định là $D(A) \subseteq X$ và miền ảnh $R(A) \subseteq X^*$.

Định nghĩa 1.5. *Toán tử A được gọi là đơn điệu nếu*

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq 0, \;\forall x, y \in D(A).$$

Toán tử A được gọi là đơn điệu chặt nếu dấu bằng chỉ đạt được khi $x = y$.

Ví dụ 1.1. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là đơn điệu nếu nó đồng biến.

Định nghĩa 1.6. *Tập hợp*

$$Gr(A) = \{(x, A(x)) : x \in X\}$$

gọi là đồ thị của toán tử A.

Khái niệm về toán tử đơn điệu cũng có thể được mô tả dựa trên đồ thị $Gr(A)$ của toán tử A trong không gian tích $X \times X^*$.

Định nghĩa 1.7. *Toán tử A được gọi là đơn điệu nếu*

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0, \ \forall x, y \in X, x^* \in A(x), y^* \in A(y).$$

Tập $Gr(A)$ được gọi là tập đơn điệu nếu nó thỏa mãn bất đẳng thức trên.

Định nghĩa 1.8. *Nếu $Gr(A)$ không chứa một tập đơn điệu nào khác trong $X \times X^*$ thì toán tử A được gọi là toán tử đơn điệu cực đại.*

Ví dụ 1.2. Toán tử $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ được xác định bởi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 39 & 7 & 32 & -20 \\ 7 & 30 & 34 & 7 \\ 32 & 34 & 58 & -5 \\ -20 & 7 & -5 & 26 \end{pmatrix}$$

có định thức khác 0 là đơn điệu. Khi đó, A là toán tử đơn điệu cực đại.

Định nghĩa 1.9. *Nếu với mọi $x \in X$ ta có $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ thì A được gọi là toán tử xác định không âm, ký hiệu là $A \geq 0$.*

Nhận xét 1.1. Nếu A là một toán tử tuyến tính trong không gian Banach X thì tính đơn điệu tương đương với tính xác định không âm của toán tử.

Ví dụ 1.3. Toán tử $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ được xác định bởi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 9 & 5 & 28 \\ 4 & 6 & 5 & 5 & 20 \\ 9 & 5 & 10 & 4 & 28 \\ 5 & 5 & 4 & 6 & 20 \\ 28 & 20 & 28 & 20 & 96 \end{pmatrix}$$

là xác định không âm.

Định nghĩa 1.10. *Toán tử A được gọi là d-đơn điệu, nếu tồn tại một hàm không âm $d(t)$, không giảm với $t \geq 0, d(0) = 0$ và thỏa mãn tính chất*

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq [d(\| x \|) - d(\| y \|)](\| x \| - \| y \|), \forall x, y \in D(A).$$

Định nghĩa 1.11. *Toán tử A được gọi là đơn điệu đều nếu tồn tại một hàm không âm $\delta(t)$, không giảm với $t \geq 0, \delta(0) = 0$ và*

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq \delta(\| x - y \|), \forall x, y \in D(A).$$

Nếu $\delta(t) = C_A t^2$ với C_A là một hằng số dương thì toán tử A được gọi là đơn điệu mạnh.

Nhận xét 1.2. Nếu toán tử A có tính chất tuyến tính thì A được gọi là đơn điệu mạnh nếu

$$\langle Ax, x\rangle \geq m_A \| x \|^2,\ m_A > 0, \forall x \in D(A).$$

Ví dụ 1.4. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x) = 2012x$ là toán tử tuyến tính đơn điệu mạnh.

Cho L là tập con nào đó của $N = \{1, ..., n\}$. A_L là ma trận đường chéo cấp $n.n$ trong đó các phần tử trên đường chéo được cho bởi

$$a_{ii} = \begin{cases} > 0 \text{ nếu } i \in L, \\ \\ = 0 \text{ nếu } i \notin L. \end{cases}$$

Khi đó A_N là một ma trận đường chéo xác định dương. Nếu $a_{ii} = 1 \quad \forall i$ thì $A_N = I_n$ là ma trận đơn vị trong $\mathbb{R}^n$.

1.3 Phương pháp lặp Newton giải phương trình phi tuyến

Xét hệ phương trình phi tuyến

$$f(x) = 0,$$

ở đây ánh xạ từ $\mathbb{R}^n$ vào chính nó. Giả sử f khả vi liên tục. Thuật toán sẽ sinh ra một dãy lặp $\{x^k\}$. Giả sử đã có x^k để tìm x^{k+1} ta giải hệ phương trình tuyến tính

$$f(x^k) + \nabla f(x^k)(x - x^k) = 0\,.$$

Giả sử rằng ma trận $\nabla f(x^k)$ không suy biến. Ta thu được x^{k+1} bằng cách

$$x^{k+1} = x^k - \nabla f(x^k)^{-1} f(x^k).$$