ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN KHẮC HIẾU

LÝ THUYẾT NEVANLINNA CHO HÀM PHÂN HÌNH VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN KHẮC HIẾU

LÝ THUYẾT NEVANLINNA CHO HÀM PHÂN HÌNH VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: **60.46.01.02**

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TSKH TRẦN VĂN TẤN

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

MỞ ĐẦU **1**

1 Lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình **3**

1.1 Một số khái niệm cơ bản 3

1.1.1 Divisor trong mặt phẳng phức 3

1.1.2 Các hàm Nevanlinna của hàm phân hình 4

1.2 Định lý cơ bản thứ nhất 6

1.2.1 Một số kí hiệu 6

1.2.2 Công thức Jenssen 8

1.2.3 Định lí cơ bản thứ nhất 13

1.2.4 Một số ví dụ 14

1.3 Định lí cơ bản thứ hai 15

1.3.1 Bổ đề Borel và bổ đề về đạo hàm Logarit 15

1.3.2 Định lí cơ bản thứ hai 19

2 Một số ứng dụng của lý thuyết Nevanlinna trong bài toán xác định duy nhất hàm phân hình **23**

2.1 Định lý Picard 23

2.2 Định lý 5 điểm Nevanlinna 23

2.3 Định lý 4 điểm Nevanlinna 25

Kết luận **34**

Tài liệu tham khảo **35**

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn luận văn

Lí thuyết Nevanlinna, hay thường được gọi là lí thuyết phân bố giá trị, được xây dựng đầu tiên bởi R.Nevanlinna vào năm 1925 cho trường hợp một biến phức. Sau khi bài báo của ông được công bố, lí thuyết này đã được mở rộng và nghiên cứu sâu sắc bởi nhiều nhà toán học. Đầu tiên lí thuyết Nevanlinna được tổng quát lên cho trường hợp ánh xạ phân hình nhiều biến bởi các tác giả A. Bloch, H. Cartan, H. J. Weyles và L. Ahlfors.Sau đó nó được W. Stoll phát triển lên cho trường hợp ánh xạ phân hình từ không gian parabolic vào đa tạp xạ ảnh. Đồng thời, lí thuyết Nevanlinna còn được xây dựng cho trường hợp hàm bởi công trình của D. Masson, J. F. Voloch, J. Noguchi và J. Wang. Đây có thể xem như một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu giả thiết ABC và xấp xỉ Diophantine.

Sự phát triển của lí thuyết Nevanlinna đã mang đến một công cụ vô cùng hữu hiệu để nghiên cứu nhiều vấn đề khác nhau trong hình học giải tích phức như vấn đề duy nhất hay hữu hạn của ánh xạ phân hình, tính chuẩn tắc và thác triển của ánh xạ phân hình. Đặc biệt là một số ứng dụng trong bài toán về xác định duy nhất hàm phân hình. Vì thế, tôi lựa chọn luận văn này là muốn được tiếp cận, tìm hiểu và nghiên cứu về vấn đề này.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc tài liệu từ các tạp chí toán học trong nước và quốc tế liên quan đến lý thuyết Nevanlinna. Qua đó, tìm hiểu và nghiên cứu về vấn đề này.

3. Mục đích của luận văn

Mục đích của luận văn này là học tập và giới thiệu các kết quả nổi bật về lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình và một số ứng dụng trong bài toán xác định duy nhất hàm phân hình.

4. Nội dung của Luận văn

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương nội dung chính, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1. Lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình.

Chương 2. Một số ứng dụng của lý thuyết Nevanlinna trong bài toán xác định duy nhất hàm phân hình.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và nhiệt tình chỉ bảo của PGS.TSKH Trần Văn Tấn. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán-trường Đại học sư phạm, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K18B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, ngày 19 tháng 08 năm 2012

Tác Giả

Nguyễn Khắc Hiếu

Chương 1

Lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình

1.1 Một số khái niệm cơ bản

1.1.1 Divisor trong mặt phẳng phức

Định nghĩa 1.1. *Một divisor D trên miền $U \subset \mathbb{C}$ là một tổng hình thức có dạng*

$$D = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu z_\nu, \lambda_\nu \in \mathbb{Z}, \{z_\nu\} \text{ rời rạc trong } U \ .$$

Định nghĩa 1.2. *Một hàm f xác định trên tập con mở $U \subset \mathbb{C}$ với giá trị phức được gọi là hàm phân hình nếu với mỗi $a \in U$ tồn tại lân cận mở liên thông $V \subset U$ chứa a và tồn tại các hàm chỉnh hình g, h trên $V, h \not\equiv 0$, sao cho $f = \dfrac{g}{h}$ trên V.*

Giả sử f là hàm phân hình trên U. Khi đó, với mỗi $a \in U$ ta có $f(z) = (z-a)^m.g(z), m \in \mathbb{Z}, g(z)$ là hàm chỉnh hình trên U và $g(a) \neq 0$.
+) Nếu $m > 0$ ta nói rằng a là không điểm bậc m của f.
+) Nếu $m < 0$ ta nói rằng a là cực điểm bậc m của f.

Định nghĩa 1.3. *Giả sử f là hàm phân hình trên $U, \{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}, \{b_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ lần lượt là các không điểm, cực điểm của f trên U, a_ν có bậc λ_ν, b_ν có bậc $-\mu_\nu$ với $\mu_\nu < 0$. Ta định nghĩa các divisor không điểm, divisor cực điểm* *và divisor sinh bởi hàm f lần lượt như sau:*

$$(f)_0 = \sum_{\lambda_\nu > 0} \lambda_\nu a_\nu,\ (f)_\infty = \sum_{\mu_\nu < 0} -\mu_\nu b_\nu,\ (f) = (f)_0 - (f)_\infty$$

1.1.2 Các hàm Nevanlinna của hàm phân hình

Định nghĩa 1.4. *(Hàm đếm). Giả sử $D = \sum \mu_\nu z_\nu$ là một divisor trên $\mathbb{C}$. Với mỗi số tự nhiên k (hoặc $k = \infty$), ta xác định hàm đếm của D chặn bội đến bậc k như sau:*

$$N_k(r, D) = \int_1^r \frac{n_k(t, D)}{t} dt, \quad t > 1$$

trong đó $n_k(t, D) = \sum\limits_{|z_\nu| < t} min\{k, \mu_\nu\}$

Ta sử dụng các kí hiệu $n(t, D)$ và $N(r, D)$ thay cho $n_{+\infty}(t, D)$ và $N_{+\infty}(r, D)-$ hàm đếm với bội không bị chặn, và khi đó ta có

$$N(r, D) = \int_1^r \frac{n(t, D)}{t} dt, \quad n(t, D) = \sum_{|z_\nu| < t} \mu_\nu.$$

Định nghĩa 1.5. *(Hàm xấp xỉ). Giả sử $f \not\equiv 0$ là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$, hàm xấp xỉ của f được định nghĩa bởi*

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{S(r)} log^+ |f(z)| d\theta.$$

Trong đó với mỗi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\log^+(x) = \begin{cases} \log x & : \textit{nếu } x > 1 \\ 0 & : \textit{nếu} x \le 1 \end{cases}$$

Định nghĩa 1.6. *(Hàm đặc trưng Nevanlinna). Hàm đặc trưng Nevanlinna $T(r, f)$ của hàm f được xác định bởi:*

$$T(r, f) = N(r, (f)_\infty) + m(r, f).$$

Từ các định nghĩa trên ta có một số tính chất sau :

i) tính chất của log^+ :

(a) $logx = log^+ x - log^+ \dfrac{1}{x} \le log^+ x.$

(b) $|logx| = log^+x + log^+\dfrac{1}{x}$.

(c) $log^+ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} log^+x_i + logn$.

(d) $log^+ \prod\limits_{i=1}^{n} x_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} log^+x_i$.

ii) Tính chất của hàm đặc trưng.

Giả sử $f_1, f_2, \ldots, f_n$ là các hàm phân hình. Khi đó:

(a) $T(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} T(r, f_i) + logn$.

(b) $T(r, \prod\limits_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} T(r, f_i)$.

(c) $N(r, (\prod\limits_{i=1}^{n} f_i)_\infty) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} N(r, (f_i)_\infty)$.

(d) $N(r, (\prod\limits_{i=1}^{n} f_i)_0) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} N(r, (f_i)_0)$.

Chứng minh. (a) Ta có

$$m(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{S(r)} log^+|\sum_{i=1}^{n} f_i| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_{|z|} log^+|f_i| d\theta + logn$$
$$= \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + logn. \qquad (1.1)$$

Mặt khác

$$n\left(r, (\sum_{i=1}^{n} f_i)_\infty\right) \leq \sum_{i=1}^{n} n(r, (f_i)_\infty).$$

Suy ra:

$$N\left(r, (\sum_{i=1}^{n})_\infty\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, (f_i)_\infty). \qquad (1.2)$$

Cộng vế với vế của (1.1) và (1.2) ta có kết luận ii.(a)

(b) Ta có:

$$m(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{S(r)} log^+ |\prod_{i=1}^{n} f_i| d\theta$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_{S(r)} log^+ |f_i| d\theta = \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i).$$

và

$$n\left(r, (\prod_{i=1}^{n} f_i)_\infty\right) \leq \sum_{i=1}^{n} n(r, (f_i)_\infty).$$

Suy ra

$$N\left(r, (\prod_{i=1}^{n} f_i)_\infty\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, (f_i)_\infty).$$

Từ đó ta có kết luận ii.(b).

(c), (d) Từ kết quả ii.(a) và ii.(b) ta có kết luận của ii.(c) và ii.(d). □

1.2 Định lý cơ bản thứ nhất

1.2.1 Một số kí hiệu

Ta kí hiệu tọa độ phức trên không gian phứ $\mathbb{C}$ là $z = x + iy, (x, y \in \mathbb{R})$. Với $a \in \mathbb{C}, r > 0$ ta đặt

$$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < r\}, \Delta(r) = \{z \in \mathbb{C}; |z = r|\}$$

Với $\varphi = \varphi(x, y)$ là hàm khả vi, $\varphi = u + iv$, ta định nghĩa các toán tử đạo hàm riêng

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

và

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right).$$

Ta định nghĩa các toán tử $\partial\varphi, \overline{\partial}\varphi, d\varphi, d^c\varphi$ như sau:

$$\partial\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz, \quad \overline{\partial}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}d\overline{z},$$
$$d\varphi = \partial\varphi + \overline{\partial}\varphi, \quad d^c\varphi = \frac{i}{4\pi}(\overline{\partial}\varphi - \partial\varphi).$$

Từ đây ta có:

$$\begin{aligned} d^c\varphi &= \frac{i}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}d\overline{z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{x}}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dx\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dd^c &= \frac{i}{4\pi}(\partial + \overline{\partial})(\partial - \overline{\partial})\varphi \\ &= \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi = \frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}}dz \wedge d\overline{z}. \end{aligned}$$

Trong hệ tọa độ cực $z = r.e^{i\theta}, \overline{z} = r.e^{-i\theta}$.
Ta có $r^2 = z.\overline{z} = x^2 + y^2, r.cos\theta = x, r.sin\theta = y$, cho nên:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = cos\theta, \frac{\partial r}{\partial y} = sin\theta,$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{sin\theta}{r}, \frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{cos\theta}{r}$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} d^c\varphi &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dx\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\Bigg(\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big)\big(sin\theta dr + rcos\theta d\theta\big) - \\ &- \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}\Big)\big(cos\theta dr - rsin\theta d\theta\big)\Bigg) \\ &= \frac{1}{4\pi}\Bigg(\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial r}cos\theta - \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{sin\theta}{r}\Big)(sin\theta + rcos\theta d\theta) - \\ &- \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial r}sin\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{cos\theta}{r}\Big)(cos\theta dr - rsin\theta d\theta)\Bigg) \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}d\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}dr\right). \end{aligned}$$