ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN LỆ THUỶ

VỀ ĐỐI NGẪU LAGRANGE CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU LỒI CÓ RÀNG BUỘC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN LỆ THUỶ

VỀ ĐỐI NGẪU LAGRANGE CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU LỒI CÓ RÀNG BUỘC

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Đỗ Văn Lưu

THÁI NGUYÊN, 2012

MỤC LỤC

Trang

MỞ ĐẦU

1.Lí do chọn đề tài.

Lí thuyết đối ngẫu là một bộ phận quan trọng của lí thuyết tối ưu hoá. Người ta thường nghiên cứu đối ngẫu Lagrange, đối ngẫu Wolfe và đối ngẫu Mond-Weir với các định lí đối ngẫu yếu, mạnh, ngược. Sự sai khác đối ngẫu 0 là một vấn đề quan trọng của lí thuyết đối ngẫu. Trong bài toán quy hoạch sự sai khác đối ngẫu 0 có nghĩa là giá trị của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu bằng nhau. Khi giá trị của bài toán đối ngẫu đạt được thì tính chất sai khác đối ngẫu 0 trở thành tính đối ngẫu mạnh.

Nhiều nghiên cứu về đối ngẫu Lagrange đã đưa ra các điều kiện chính quy đảm bảo tính chất sai khác đối ngẫu 0 đúng. Jeyakumar [6] đã nghiên cứu các điều kiện cần và đủ cho đối ngẫu mạnh và đối ngẫu min-max cho bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc nón và ràng buộc tập. Jeyakumar-Li [8] đã thiết lập các điều kiện cần và đủ cho sự sai khác đối ngẫu 0 ổn định cho bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc nón và áp dụng cho bài toán quy hoạch bán xác định lồi.

Lí thuyết đối ngẫu Lagrange đã và đang được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Chính vì vậy tôi chọn đề tài: " Về đối ngẫu Lagrange của bài toán tối ưu lồi có ràng buộc " . Đề tài này có tính thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

2.Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu.

2.1.Mục đích nghiên cứu.

Mục đích nghiên cứu của luận văn này là trình bày các định lí đối ngẫu Lagrange cho các bài toán tối ưu lồi có ràng buộc nón, bao gồm: Các điều kiện chính quy đặc trưng cho đối ngẫu Lagrange mạnh và đối ngẫu min-max của Jeyakumar [6] cho bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc nón và ràng buộc tập, và các điều kiện đặc trưng cho tính chất sai khác đối ngẫu 0 ổn định của Jeyakumar-Li [8] cho bài toán tối ưu lồi với ràng buộc nón cùng với các áp dụng cho bài toán quy hoạch bán xác định lồi.

2.2.Nhiệm vụ nghiên cứu.

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

- Đọc, dịch tài liệu từ hai bài báo tiếng Anh của Jeyakumar và Jeyakumar-Li.
- Sử dụng các kết quả của hai bài báo đó để viết luận văn.

3.Phương pháp nghiên cứu.

Sử dụng công cụ giải tích hàm, giải tích lồi và các kiến thức của lí thuyết tối ưu.

4.Bố cục của luận văn.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, phần kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 ĐỐI NGẪU MẠNH CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU LỒI

VÀ ÁP DỤNG CHO QUY HOẠCH BÁN XÁC ĐỊNH

Trình bày các định lí đối ngẫu Lagrange của Jeyakumar-Li [8] về các điều kiện đặc trưng cho tính chất sai khác đối ngẫu 0 ổn định của bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc nón và các áp dụng cho bài toán quy hoạch bán xác định lồi.

Chương 2 ĐIỀU KIỆN CHÍNH QUY VÀ ĐỐI NGẪU LAGRANGE

Trình bày các định lí đối ngẫu Lagrange của Jeyakumar [6] về các điều kiện chính quy đặc trưng cho đối ngẫu mạnh và đối ngẫu min-max của bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc nón và ràng buộc tập.

Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới PGS-TS Đỗ Văn Lưu, người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi hoàn thành bản luận văn này.

Tôi xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn đến các thầy cô giáo trong Khoa Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán trường Đại học sư phạm Thái Nguyên, Đại học sư phạm Hà Nội, Viện Toán học Việt Nam đã giảng dạy và giúp đỡ tôi hoàn thành khoá học.

Tôi xin chân thành cảm ơn Sở giáo dục và đào tạo tỉnh Yên Bái, trường THPT Lê Quý Đôn, gia đình, các bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học Toán K18 đã quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2012.

Nguyễn Lệ Thuỷ

Chương I

ĐỐI NGẪU MẠNH CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU LỒI VÀ ÁP DỤNG CHO QUI HOẠCH BÁN XÁC ĐỊNH

Chương I trình bày các định lí đối ngẫu Lagrange của Jeyakumar-Li [8] (2009), về các điều kiện đặc trưng cho tính chất sai khác đối ngẫu 0 ổn định của bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc nón, cùng với các áp dụng cho bài toán quy hoạch bán xác định lồi.

1.1.HÀM LIÊN HỢP

Một số kiến thức giải tích lồi sẽ được trình bày trong mục này là cần thiết cho nội dung của luận văn.

1.1.1. CÁC PHÉP TOÁN VỀ HÀM LỒI

Giả sử X là không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương,
$D \subset X,\ f:\ D \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Nhắc lại:

Trên đồ thị (epigraph) của hàm f được định nghĩa như sau:

$$\operatorname{epi} f = \{(x,r) \in D \times \mathbb{R} :\ f(x) \le r\}.$$

Miền hữu hiệu (effective domain) của f được xác định như sau:

$$\operatorname{dom} f = \{x \in D :\ f(x) < +\infty\}.$$

Hàm f được gọi là lồi trên D nếu $\text{epi}f$ là tập lồi trong $X \times \mathbb{R}$.

Hàm f được gọi là lõm trên D nếu $-f$ là lồi trên D. Chú ý rằng nếu f lồi thì $\text{dom}f$ lồi.

Hàm f được gọi là chính thường (proper) nếu

$$\text{dom}f \neq \varnothing \text{ và } f(x) > -\infty, \ (\forall x \in D).$$

Định lý 1.1.1[1]

Giả sử $f_1, ..., f_m$ là các hàm lồi chính thường trên X. Khi đó, tổng $f_1 + ... + f_m$ là một hàm lồi.

Định lý 1.1.2

Giả sử F là tập lồi trong $X \times \mathbb{R}$ và

$$f(x) = \inf\{\mu : (x, \mu) \in F\}. \tag{1.1.1}$$

Khi đó, f là hàm lồi trên X.

Chú ý: Ta qui ước *infinum* trên tập $\varnothing$ (các số thực) bằng $+\infty$.

Chứng minh

Nếu $f(x_1) < r$, thì từ (1.1.1) suy ra: $\exists \mu_1 < r, (x_1, \mu_1) \in F$.

Nếu $f(x_2) < s$, thì $\exists \mu_2 < s, (x_2, \mu_2) \in F$. Suy ra:

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2) \in F \qquad (0 < \lambda < 1).$$

$$\Rightarrow \quad f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) = \inf\left\{\mu : \left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right), \mu \in F\right\}$$

$$\leq \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2 < \lambda r + (1-\lambda)s .$$

$\Rightarrow \quad f$ là hàm lồi. $\square$

Định nghĩa 1.1.1

Giả sử $f_1,..., f_m$ là các hàm chính thường trên X. Tổng chập infimal (infimal convolution) của $f_1,..., f_m$ được xác định như sau:

$$f(x) = \inf\left\{ f_1(x_1) + ... + f_m(x_m) : x_i \in X, \sum_{i=1}^{m} x_i = x \right\}, \qquad (1.1.2)$$

và được ký hiệu là $\mathop{\square}\limits_{i=1}^{m} f_i$ hay $f_1 \square ... \square f_m$.

Nhận xét 1.1.1

Trường hợp m = 2, (1.1.2) có dạng:

$$(f_1 \square f_2)(x) = \inf_y \left\{ f_1(x-y) + f_2(y) \right\}.$$

Định lý 1.1.3

Giả sử $f_1,..., f_m$ là các hàm lồi chính thường trên X. Khi đó, $\mathop{\square}\limits_{i=1}^{m} f_i$ là hàm lồi trên X.

Chứng minh

Đặt $F_i = \text{epi} f_i$, $F = F_1 + ... + F_m$. Khi đó, F là tập lồi trong $X \times \mathbb{R}$.

Theo Định nghĩa,

$$\left(x,\mu\right)\in F \Leftrightarrow \exists x_i \in \mathbb{R}^n,\ \exists \mu_i \in \mathbb{R}$$

sao cho

$$f\left(x_i\right)\le \mu_i \quad (i=1,...,m),\ \mu=\mu_1+...+\mu_m,\ x=x_1+...+x_m.$$

Do đó, hàm f được xác định bởi 1.1.2 là một hàm lồi được xây dựng theo Định lý 1.1.2 bởi tập F. $\square$

Nhận xét 1.1.2

Nếu các hàm $f_1,...,f_m$ là các hàm lồi chính thường, thì hàm f được xác định bởi (1.1.2) là một hàm lồi, nhưng có thể không chính thường.

1.1.2. HÀM LIÊN HỢP

Giả sử X là không gian lồi địa phương, X^* là không gian liên hợp (tôpô) của X, f là hàm xác định trên X.

Định nghĩa 1.1.2

Phép biến đổi Young-Fenchel, của hàm f, hay hàm liên hợp với f, được xác định trên X^* như sau

$$f^*\left(x^*\right)=\sup_{x\in X}\left\{\left\langle x^*,x\right\rangle - f\left(x\right)\right\}. \qquad (1.1.3)$$

Chú ý: cận trên trong (1.1.3) chỉ lấy theo $x\in \mathrm{dom}f$.

Mệnh đề 1.1.1

f^* là hàm lồi đóng *yếu.