ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VŨ VIỆT HƯNG

ĐA THỨC HILBERT VÀ CHIỀU NOETHER CHO MÔĐUN ARTIN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VŨ VIỆT HƯNG

ĐA THỨC HILBERT VÀ CHIỀU NOETHER CHO MÔĐUN ARTIN

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 60.46.05

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS Lê Thị Thanh Nhàn

THÁI NGUYÊN – 2012

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và sự chỉ bảo nghiêm khắc của PGS.TS. Lê Thanh Nhàn. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới Cô.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới GS.TSKH. Nguyễn Tự Cường, GS.TSKH. Phùng Hồ Hải, GS.TS. Nguyễn Quốc Thắng, TS. Vũ Thế Khôi và các thầy cô giáo Trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập tại Trường.

Tôi xin chân thành cảm ơn tập thể cán bộ giáo viên trường PTDT Nội Trú Quản Bạ - Tỉnh Hà Giang nơi tôi đang công tác, đã tạo điều kiện để tôi hoàn thành kế hoạch học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã động viên, ủng hộ tôi cả về vật chất và tinh thần để tôi hoàn thành tốt khóa học của mình.

LỜI NÓI ĐẦU

Một phương pháp hữu hiệu để nghiên cứu các môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương là sử dụng các kết quả tương ứng của môđun phân bậc hữu hạn sinh trên vành phân bậc Noether. Chẳng hạn, với một môđun phân bậc hữu hạn sinh $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ trên một vành phân bậc chuẩn Noether $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$, hàm độ dài $\ell_{R_0}(M_n)$ là đa thức khi n đủ lớn. Từ đó người ta có thể suy ra rằng nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán Noether địa phương và M là R-môđun hữu hạn sinh thì hàm độ dài $\ell_R(M/\mathfrak{q}^n M)$ là một hàm đa thức với mỗi iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ $\mathfrak{q}$. Hơn nữa, chiều Krull $\dim M$ của M chính là bậc của đa thức $\ell_R(M/\mathfrak{q}^n M)$ và cũng là số tự nhiên t bé nhất sao cho tồn tại t phần tử $x_1, \ldots, x_t \in \mathfrak{m}$ để $\ell(M/(x_1, \ldots, x_t)M) < \infty$.

Đối ngẫu với khái niệm chiều Krull $\dim M$ là khái niệm chiều Noether $\text{N-dim}_R A$ của một R-môđun Artin A. Khái niệm này được giới thiệu bởi R. N. Roberts [Ro] với tên gọi "chiều Krull" và sau đó D. Kirby [K2] đổi thành chiều Noether để tránh nhầm lẫn. Trong bài báo [K1], D. Kirby đã đưa ra một tiêu chuẩn Artin cho các môđun phân bậc và chứng minh tính chất hàm đa thức của các độ dài của các môđun thành phần thuần nhất với bậc đủ nhỏ. Sử dụng kết quả này, Ông đã chỉ ra rằng với mỗi R-môđun Artin A trên vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$ và với mỗi iđêan $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$ sao cho $\ell_R(0 :_A \mathfrak{q}) < \infty$, độ dài $\ell_R(0 :_A \mathfrak{q}^n)$ là một đa thức khi n đủ lớn, gọi là đa thức Hilbert của A ứng với $\mathfrak{q}$. Tiếp theo, trong bài báo [Ro], R. N. Roberts đã chỉ ra rằng bậc của đa thức này chính là chiều Noether của A và là số tự nhiên t bé nhất sao cho tồn tại t phần tử $x_1, \ldots, x_t \in \mathfrak{m}$ để $\ell(0 :_A (x_1, \ldots, x_t)R) < \infty$.

Mục đích của luận văn là trình bày lại tiêu chuẩn Artin cho môđun phân bậc, đồng thời chứng minh lại chi tiết các kết quả về đa thức Hilbert và chiều Noether cho môđun Artin trong hai bài báo

1. D. Kirby, *Artinian modules and Hilberts polynomials*, Quart. J. Math. Oxford **24** (1973), 47-57.

2. R. N. Roberts, *Krull dimension for artinian modules over quasi local commutative rings*, Quart. J. Math. Oxford **26** (1975), 269-273.

Luận văn cũng trình bày một số ứng dụng trong việc nghiên cứu tính Artin và chiều Noether của môđun các đa thức ngược.

Luận văn này chia làm 2 chương. Phần đầu của Chương I nhắc lại một số khái niệm và tính chất của môđun phân bậc. Phần tiếp theo chứng minh một tiêu chuẩn Artin cho môđun phân bậc. Chương II trình bày các kết quả về đa thức Hilbert và chiều Noether cho môđun Artin trên vành địa phương, đồng thời đưa ra một số ứng dụng trong việc nghiên cứu tính Artin và chiều Noether của môđun các đa thức ngược.

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2012

Tác giả

Vũ Việt Hưng

Chương 1

Tiêu chuẩn Artin cho môđun phân bậc

1.1 Môđun phân bậc

Mục đích của tiết này là nhắc lại các khái niệm và tính chất cơ sở của vành và môđun phân bậc.

1.1.1 Định nghĩa. Cho A là nhóm giao hoán với phép toán kí hiệu theo lối cộng. Ta nói A là *tổng trực tiếp* của họ nhóm con $\{A_i\}_{i\in I}$ nếu A sinh bởi $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ và $A_i \cap L_i = \{0\}$ với mọi $i \in I$, trong đó L_i là nhóm con của A sinh bởi tập $\bigcup\limits_{i\neq j\in I} A_j$. Nếu A là tổng trực tiếp của họ nhóm con $\{A_i\}_{i\in I}$ thì ta viết $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$.

Chú ý rằng A là tổng trực tiếp của họ nhóm con $\{A_i\}_{i\in I}$ nếu mỗi phần tử $a \in A$ đều biểu diễn một cách duy nhất thành một tổng hữu hạn $a = a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$, trong đó $a_{ij} \in A_{ij}$ với mọi $j = 1, \ldots, k$.

1.1.2 Định nghĩa. Cho S là một vành. Ta nói rằng S là *vành phân bậc* nếu S có sự biểu diễn thành tổng trực tiếp $S = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} S_n$ của một họ nhóm con $\{S_n\}$ của nhóm cộng S sao cho $S_n S_m \subseteq S_{n+m}$ với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$. Mỗi phần tử của S_n được gọi là *phần tử thuần nhất* bậc n.

1.1.3 Bổ đề. *Nếu $S = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} S_n$ là một vành phân bậc thì S_0 là một vành con của S và S_n là S_0-môđun với mọi $n \in \mathbb{Z}$.*

Chứng minh. Để chứng minh S_0 là một vành, ta chỉ cần chứng minh phép nhân đóng kín trong S_0. Điều này suy ra từ định nghĩa vành phân bậc, cụ thể $S_0S_0 \subseteq S_0$. Để chứng minh S_n là S_0-môđun, ta chỉ cần chỉ ra quy tắc $\varphi : S_0 \times S_n \to S_n$ cho bởi $\varphi(a, x) = ax$ là tích vô hướng. Điều này là rõ ràng vì từ định nghĩa vành phân bậc ta có $S_0S_n \subseteq S_n$. □

1.1.4 Định nghĩa. Giả sử L là vành. Một L-*đại số* là một vành S và đồng thời S là một L-môđun. Một L-đại số S được gọi là *hữu hạn sinh* nếu tồn tại hữu hạn phần tử $a_1, \ldots, a_n \in S$ sao cho

$$S = \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) \in L[x_1, \ldots, x_n]\},$$

trong đó $L[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức n biến với hệ số trong L và mỗi phần tử $c \in L$ được đồng nhất với phần tử $c1 \in S$. Trong trường hợp này ta nói $\{a_1, \ldots, a_n\}$ là một hệ sinh của đại số S và ta viết $S = L[a_1, \ldots, a_n]$.

Từ nay đến hết chương này, luôn giả thiết $S = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{Z}} S_n$ là một vành phân bậc. Rõ ràng S có cấu trúc tự nhiên là một S_0-đại số. Nếu tồn tại hữu hạn phần tử $a_1, \ldots, a_n \in S_1$ sao cho $S = S_0[a_1, \ldots, a_n]$ thì ta nói S là S_0-*đại số phân bậc chuẩn*.

1.1.5 Bổ đề. *Giả sử S là đại số phân bậc chuẩn. Khi đó S là thương của vành đa thức trên S_0. Nếu thêm giả thiết S_0 là vành Noether thì S cũng là vành Noether.*

Chứng minh. Giả sử $S = S_0[a_1, \ldots, a_n]$ với $a_1, \ldots, a_n \in S_1$. Khi đó $\varphi : S_0[x_1, \ldots, x_n] \to S$ cho bởi $\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(a_1, \ldots, a_n)$ là toàn cấu vành, trong đó $S_0[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức n biến trên S_0. Vì thế $S \cong S_0[x_1, \ldots, x_n]/\operatorname{Ker}\varphi$. Vì S_0 là Noether nên theo Định lí cơ sở Hilbert, $S_0[x_1, \ldots, x_n]$ cũng là vành Noether. Do đó vành thương $S_0[x_1, \ldots, x_n]/\operatorname{Ker}\varphi$ là Noether. Suy ra S là vành Noether. □

1.1.6 Ví dụ. Cho K là một trường. Kí hiệu $S = K[x_1, \ldots x_n]$ là vành đa thức n biến với hệ số trong K. Một phần tử của S có dạng $ax_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ với $a \in K$ được gọi là một *từ* của S có bậc $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Ta quy ước phần tử 0 có bậc tuỳ ý. Hai từ $u = ax_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ và $v = bx_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$ được gọi là *đồng dạng* nếu $\alpha_i = \beta_i$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Một đa thức $f \in S$ được gọi là *thuần nhất* bậc n nếu f là tổng của hữu hạn từ, mỗi từ đều có bậc n. Với mỗi $n \geqslant 0$, đặt S_n là tập các đa thức thuần nhất bậc n. Đặt $S_n = 0$ với mọi $n < 0$. Chú ý rằng mỗi đa thức trong S đều viết được một cách duy nhất thành tổng của các từ không đồng dạng. Do đó, bằng việc nhóm các từ cùng bậc lại với nhau, mỗi đa thức $f \in S$ đều viết được một cách duy nhất thành tổng của hữu hạn đa thức thuần nhất. Suy ra $S = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{Z}} S_n$. Dễ thấy $S_n S_m \subseteq S_{n+m}$ với mọi n, m. Vì thế S là một vành phân bậc. Ta gọi cách phân bậc như trên của S là phân bậc tự nhiên.

1.1.7 Định nghĩa. Cho $S = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{Z}} S_n$ là một vành phân bậc. Một iđêan I của S được gọi là *thuần nhất* hay *phân bậc* nếu $I = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{Z}} (I \cap S_n)$.

Sau đây là một số tiêu chuẩn để một iđêan trong vành phân bậc là thuần nhất.

1.1.8 Bổ đề. *Cho I là iđêan của vành phân bậc $S = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{Z}} S_n$. Các phát biểu sau là tương đương:*

(i) I là iđêan thuần nhất.

(ii) $\sum f_i \in I$ với $f_i \in S_i$ nếu và chỉ nếu $f_i \in I$, với mọi i.

(iii) I có một hệ sinh gồm những phần tử thuần nhất.

Chứng minh. (i)⇒(ii). Nếu $f_i \in I$, với mọi i thì rõ ràng $\sum f_i \in I$. Ngược lại, giả sử $f = \sum f_i \in I$ với $f_i \in S_i$. Vì $I = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{Z}} (I \cap S_n)$ và $f \in I$ nên f có biểu diễn $f = \sum g_i$ với $g_i \in I \cap S_i$. Vì f chỉ có duy nhất một cách biểu diễn thành tổng của hữu hạn phần tử thuần nhất nên ta phải có $f_i = g_i$ với mọi i. Vì thế $f_i \in I \cap S_i$ với mọi i. Đặc biệt, $f_i \in I$ với mọi i.

(ii)⇒(iii). Giả sử $I = \sum_{j\in J} F_j S$ với $F_j \in S$. Với mỗi j, biểu diễn $F_j = \sum_{k=-m_j}^{n_j} f_{jk}, f_{jk} \in S_k$ thành tổng của hữu hạn phần tử thuần nhất. Rõ ràng $I \subseteq (f_{jk}, j \in J, k = m_j, \ldots, n_j)S$. Theo (ii), $f_{jk} \in I$ với mọi j, k. Vì thế

$$(f_{jk}, j \in J, k = -m_j, \ldots, n_j)S \subseteq I.$$

Vậy $I = (f_{jk}, j \in J, k = -m_j, \ldots, n_j)S$, tức là I có một hệ sinh $\{f_{jk}\}$ với $j \in J$ và $k = -m_j, \ldots, n_j$ là hệ gồm những phần tử thuần nhất.

(iii)⇒(i). Ta chỉ cần chứng minh $I \subseteq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (I \cap S_n)$. Lấy $f \in I$. Theo giả thiết (iii), I có một hệ sinh (f_k) với $f_k \in S_k$. Do đó ta có biểu diễn $f = f_{k_1}G_1 + \ldots + f_{k_n}G_n$ với $f_{k_i} \in S_{k_i} \cap I$ và $G_i \in S$. Khai triển vế phải rồi nhóm các hạng tử đồng dạng, ta biểu diễn được f là tổng của các phần tử thuần nhất, mỗi hạng tử đều thuộc I vì nó là một tổng của hữu hạn các hạng tử mà mỗi hạng tử đều chứa một nhân tử f_{k_i} nào đó. Vì thế $f \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (I \cap S_n)$. □

1.1.9 Chú ý. Từ chứng minh bổ đề trên ta có các tính chất sau:

(i) Nếu S là vành phân bậc Noether thì một iđêan I của S là thuần nhất nếu và chỉ nếu I có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử thuần nhất.

(ii) Tổng của hai iđêan thuần nhất là iđêan thuần nhất.

(iii) Giao của hai iđêan thuần nhất là iđêan thuần nhất.

Phần tiếp theo, chúng ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất của môđun phân bậc.

1.1.10 Định nghĩa. Cho $S = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S_n$ là vành phân bậc. Một S-môđun X được gọi là *phân bậc* nếu có một họ $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ các nhóm con của nhóm