ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

– – – – – – – – – – –

CAO THỊ HÀ

XÁC ĐỊNH DUY NHẤT CỦA HÀM PHÂN HÌNH $P-$ADIC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

−−−−−−−−−−−

CAO THỊ HÀ

XÁC ĐỊNH DUY NHẤT CỦA HÀM PHÂN HÌNH $P-$ADIC

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS HÀ TRẦN PHƯƠNG

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

Mở đầu **1**

1 Một số vấn đề về Lý thuyết Nevanlinna $p-$adic **3**

1.1 Hàm đặc trưng 3

1.2 Hai định lý cơ bản 10

2 Xác định duy nhất của hàm phân hình p-adic **16**

2.1 Hàm phân hình chung nhau các giá trị 16

2.1.1 Định lý duy nhất kiểu Adams-Straus 16

2.1.2 Giá trị bội của hàm phân hình 20

2.2 Đa thức duy nhất của hàm phân hình 24

2.2.1 Đa thức duy nhất kiểu $Y_{n,m}$ 24

2.2.2 Đa thức duy nhất kiểu $F_{n,b}$ 28

2.3 Hàm phân hình chung nhau tập hợp 30

2.3.1 Tập duy nhất cho hàm phân hình $p-$adic 30

2.3.2 Tập duy nhất kiểu $F^{o}_{n,b}$ 35

Kết luận **46**

Tài liệu tham khảo **48**

Mở đầu

1. Lý do chọn luận văn

Vấn đề nghiên cứu sự xác định duy nhất của các hàm hay ánh xạ phân hình thông qua ảnh ngược của một tập hữu hạn thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước: G.Pólya, R.Nevanlinna, F. Gross, ... và thu được nhiều kết quả quan trọng. Năm 1926, R.Nevanlinna đã chứng minh: Nếu hai hàm phân hình f và g chung nhau 5 giá trị phân biệt thì trùng nhau. Kết quả này của Nevanlinna cho thấy một hàm phân hình phức được xác định một cách duy nhất bởi ảnh ngược, không kể bội, của 5 giá trị phân biệt. Công trình này của Ông được xem là khởi nguồn cho các công trình nghiên cứu về sự xác định duy nhất hàm hay ánh xạ phân hình.

Một vấn đề tự nhiên được đưa ra bởi F. Gross (xem [6]), đó là không xét ảnh ngược của các điểm rời rạc mà xét ảnh ngược của một tập hợp điểm. Từ đó đến nay, vấn đề này được nghiên cứu một cách liên tục và mạnh mẽ với những kết quả của H. Fujimoto, W. Stoll, L. Smiley, M. Ru, Z. Tu, C. C. Yang, G. Frank, M. Reinders,. . . .

Kí hiệu $\mathbb{C}_p$ là trường các số phức $p-$adic. Ta biết $\mathbb{C}_p$ là một trường đóng đại số, có đặc số 0 và đầy đủ với chuẩn không acsimet. Song song với việc nghiên cứu vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$, các nhà toán học còn nghiên cứu vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$. Hướng nghiên cứu cũng này hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học và thu được nhiều kết quả quan trọng.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc tài liệu từ các tạp chí toán học trong nước và quốc tế liên quan đến việc ứng dụng Lý Thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình p-adic. Qua đó, tìm hiểu và nghiên cứu về vấn đề này.

3. Mục đích của luận văn

Với mục đích trình bày lại một số kết quả nghiên cứu về tính duy nhất của hàm phân hình không Acsimet, chúng tôi chọn đề tài "**Xác định duy nhất của hàm phân hình p-adic**".

4. Nội dung của Luận văn

Luận văn bao gồm phần Mở đầu, hai chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1 : *Một số vấn đề về lý thuyết Nevanlinna p-adic.* Trong chương này chúng tôi trình bày những kiến thức cơ sở cần thiết cho việc chứng minh trong chương 2 như: Các hàm Nevanlinna, định lí cơ bản thứ nhất, định lí cơ bản thứ hai.

Chương 2:*Xác định duy nhất của hàm phân hình p- adic.* Chương này chúng tôi trình bày một số kết quả trong nghiên cứu tính duy nhất của hàm phân hình.

Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn, tôi đã nhận được sự dạy bảo tận tình của các thầy cô giáo ở trường ĐHSP Thái Nguyên, ĐHSP Hà Nội, Viện Toán học. Đặc biệt là sự chỉ bảo, hướng dẫn trực tiếp của thày giáo TS Hà Trần Phương. Qua đây, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thày giáo TS Hà Trần Phương, tới các thày cô giáo và các bạn đồng nghiệp đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua.

Thái Nguyên, ngày 19 tháng 08 năm 2012

Tác Giả

Cao Thị Hà

Chương 1

Một số vấn đề về Lý thuyết Nevanlinna $p-$adic

1.1 Hàm đặc trưng

Trong phần này ta luôn quy ước các số thực ρ_0, r, ρ thỏa mãn

$$0 < \rho_0 < r < \rho \leq \infty.$$

Giả sử $f \in \mathcal{A}_{(\rho}(\mathbb{C}_p)$ là một hàm nguyên, khi đó

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (a_n \in \mathbb{C}_p). \tag{1.1}$$

Hiển nhiên ta có thể gán cho $f(z)$ giá trị của chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ với mỗi $z \in \mathbb{C}_p$ mà $|a_n z^n| \to 0$ khi $n \to \infty$ (vì khi đó chuỗi hội tụ). Bán kính hội tụ ρ của chuỗi (1.1) được tính bởi công thức

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \longrightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Giả sử chuỗi lũy thừa $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ có bán kính hội tụ là ρ: $0 < \rho \leqslant +\infty$. Với mỗi $r \in \mathbb{R}^+$: $0 < r < \rho$. Ta định nghĩa số hạng lớn nhất

$$\mu(r, f) = \max_{n \geqslant 0} |a_n| r^n$$

liên kết với chỉ số trung tâm

$$\nu(r,f) = \max_{n\geqslant 0}\{n : |a_n|r^n = \mu(r,f)\}.$$

Nhận xét. 1. Với mỗi $r : 0 < r < \rho$, $\mu(r,f)$ luôn tồn tại hữu hạn. Thật vậy, do chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hội tụ tại $z \in \mathbb{C}_p : |z| = r$, nên $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |a_n|r^n = 0$, kéo theo dãy $\{|a_n|r^n\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}_+$.

2. Hàm $\mu(r,f)$ liên tục theo r.

3. Với mỗi r, chỉ số trung tâm $\nu(r,f)$ luôn tồn tại hữu hạn và là một số nguyên không âm. Theo định nghĩa ta có

$$\mu(r,f) = |a_{\nu(r,f)}|r^{\nu(r,f)}.$$

4. Hiển nhiên, nếu $z \in \mathbb{C}_p$ mà $|z| \leqslant r$ thì

$$|f(z)| \leqslant \max_{n\geqslant 0} |a_n||z|^n \leqslant \max_{n\geqslant 0} |a_n|r^n = \mu(r,f).$$

Ta kí hiệu

$$\mu(0,f) = \lim_{r\longrightarrow 0^+} \mu(r,f), \quad \nu(0,f) = \lim_{r\longrightarrow 0^+} \nu(r,f).$$

Dễ thấy chỉ số trung tâm $\nu(r,f)$ tăng khi $r \to \rho$ và thoả mãn

$$\begin{aligned}\log\mu(r,f) = &\log|a_{\nu(0,f)}| + \int_0^r \frac{\nu(t,f)-\nu(0,f)}{t}dt \\ &+ \nu(0,f)\log r, \qquad (0 < r < \rho)\end{aligned} \tag{1.2}$$

trong đó log là kí hiệu logarit thực cơ số e.

Kí hiệu vành của chuỗi luỹ thừa $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \in \mathbb{C}_p)$ mà thoả mãn điều kiện $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |a_n|r^n = 0$ bởi $\mathcal{A}_r(\mathbb{C}_p)$. Hiển nhiên nếu $r_1 < r_2$ và $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |a_n|r_2^n = 0$ thì $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |a_n|r_1^n = 0$. Do đó

$$\mathcal{A}_{r_2}(\mathbb{C}_p) \subset \mathcal{A}_{r_1}(\mathbb{C}_p).$$

Kí hiệu $\mathcal{A}_{(r}(\mathbb{C}_p)$ là tập hợp các chuỗi luỹ thừa của z mà bán kính hội tụ là lớn hơn hoặc bằng r. Hiển nhiên, $f \in \mathcal{A}_{(r}(\mathbb{C}_p)$ nếu và chỉ nếu $f \in \bigcap\limits_{s<r} \mathcal{A}_s(\mathbb{C}_p)$. Ta viết ngắn gọn

$$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p) = \mathcal{A}_{(\infty}(\mathbb{C}_p)$$

Từ công thức (1.2) ta có với mỗi $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$, hàm $\mu(r, f)$ tăng khi $r \to \rho$. Hai định lý sau cho ta một số tính chất của hàm $\mu(r, f)$.

Định lý 1.1. *Với $r > 0$ hàm $\mu(r, .) : \mathcal{A}_r(\mathbb{C}_p) \to \mathbb{R}_+$ thoả mãn tính chất sau*

1) $\mu(r, f) = 0$ nếu và chỉ nếu $f \equiv 0$;

2) $\mu(r, f + g) \leqslant \max\{\mu(r, f), \mu(r, g)\}$;

3) $\mu(r, fg) = \mu(r, f)\mu(r, g)$.

Định lý 1.2. *Giả sử chuỗi luỹ thừa (1.1) có bán kính hội tụ $\rho > 0$. Với mỗi $z \in \mathbb{C}_p$, nếu $f(z)$ hội tụ thì tồn tại đạo hàm $f'(z)$ được tính theo công thức:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \tag{1.3}$$

Bán kính hội tụ của chuỗi (1.3) bằng bán kính tụ của f. Hơn nữa f' thoả mãn

$$\mu(r, f') \leqslant \frac{1}{r}\mu(r, f) \quad (0 < r < \rho).$$

Bây giờ ta định nghĩa hàm đếm tại các không điểm và cực điểm. Giả sử $f \in \mathcal{A}_{(\rho}(\mathbb{C}_p)$ là một hàm nguyên. Với $a \in \mathbb{C}_p$, kí hiệu $n\big(r, \frac{1}{f-a}\big)$ là số không điểm của f tại a kể cả bội, $\overline{n}\big(r, \frac{1}{f-a}\big)$ là số không điểm của f tại a không kể bội. Ta định nghĩa các hàm đếm tại các không điểm của $f - a$ kể cả bội, không kể bội bởi

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_{\rho_0}^{r} \frac{n(t, \frac{1}{f-a})}{t} dt \quad \text{với } \rho_0 < r < \rho;$$

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_{\rho_0}^{r} \frac{\overline{n}(t, \frac{1}{f-a})}{t} dt \quad \text{với } \rho_0 < r < \rho.$$

Với $a = \infty$, kí hiệu $n(r, f)$ là số cực điểm của f kể cả bội, $\overline{n}(r, f)$ là số cực điểm của f tại a không cả bội. Ta định nghĩa các hàm đếm tại các cực điểm f kể cả bội, không kể bội bởi

$$N(r, f) = \int_{\rho_0}^{r} \frac{n(t, f)}{t} dt \quad \text{với } \rho_0 < r < \rho;$$

$$\overline{N}(r,f)=\int_{\rho_0}^{r}\frac{\overline{n}(t,f)}{t}dt \quad \text{với } \rho_0<r<\rho.$$

Giả sử $f\in\mathcal{M}_{(\rho}(\mathbb{C}_p)$ là một hàm phân hình, khi đó tồn tại hai hàm $f_0, f_1\in\mathcal{A}_r(\mathbb{C}_p)$ sao cho f_0, f_1 không có nhân tử chung trong $\mathcal{A}_r(\mathbb{C}_p)$ và $f=\dfrac{f_1}{f_0}$. Với $a\in\mathbb{C}_p\cup\{\infty\}$, ta định nghĩa hàm đếm số không điểm $n\Big(r,\frac{1}{f-a}\Big)$ của f tại a (hay còn gọi là hàm đếm số $a-$ điểm của f) bởi

$$n\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\begin{cases} n(r,f)=n(r,\frac{1}{f_0}) & : a=\infty\\ n(r,\frac{1}{f_1-af_0}) & : a\neq\infty\ . \end{cases}$$

Định nghĩa hàm đếm $N(r,\frac{1}{f-a})$ của f tại a bởi

$$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\begin{cases} N(r,f)=N(r,\frac{1}{f_0}) & : a=\infty\\ N(r,\frac{1}{f_1-af_0}) & : a\neq\infty\ . \end{cases}$$

Kí hiệu

$$N(r,f=a)=\begin{cases} N(r,f)=N(r,f_0=0) & : a=\infty\\ N(r,f_1-af_0=0) & : a\neq\infty\ . \end{cases}$$

Tương tự ta cũng định nghĩa được các hàm $\overline{n}(r,f),\overline{N}(r,f)$, $\overline{n}(r,\frac{1}{f-a})$, $\overline{N}(r,\frac{1}{f-a})$.

Giả sử

$$f_1=\sum_{n=m_1}^{\infty}a_nz^n;\quad f_0=\sum_{n=m_0}^{\infty}b_nz^n,$$

trong đó $m_0,m_1\in\mathbb{N}$ và $a_{m_1}\neq 0, b_{m_0}\neq 0$. Theo công thức Jensen ta có

$$\begin{aligned} N(r,f=0)&=N(r,f_1=0)=\log\mu(r,f_1)-\log|a_{m_1}|,\\ N(r,f=\infty)&=N(r,f_0=0)=\log\mu(r,f_0)-\log|b_{m_0}|. \end{aligned}$$

Kéo theo

$$\begin{aligned} N(r,f=0)-N(r,f=\infty)&=\log\mu(r,f)-\log\frac{|a_{m_1}|}{|b_{m_0}|}\\ &=\log\mu(r,f)-\log|f^*(0)|. \end{aligned} \tag{1.4}$$

trong đó $f^*(0) = \dfrac{a_{m_1}}{b_{m_0}}$. Có thể thấy

$$f^*(0) = \lim_{z\to 0} z^{m_0-m_1} f(z) \in \mathbb{C}_p - \{0\}$$

Hơn nữa, sử dụng công thức Jensen cho các hàm f_1 và f_0 ta có:

$$\begin{aligned}
N(r,\frac{1}{f}) - N(r,f) &= N(r,\frac{1}{f_1}) - N(r,\frac{1}{f_0})\\
&= \log\mu(r,f_1) - \log\mu(\rho_0,f_1) - \log\mu(r,f_0)\\
&\quad + \log\mu(\rho_0,f_0)\\
&= \log\frac{\mu(r,f_1)}{\mu(r,f_0)} - \log\frac{\mu(\rho_0,f_1)}{\mu(\rho_0,f_0)}\\
&= \log\mu(r,f) - \log\mu(\rho_0,f). \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Công thức (1.4) và (1.5) được gọi là công thức Jensen cho các hàm phân hình.

Tiếp theo ta định nghĩa hàm bù (hay còn gọi là hàm xấp xỉ) của hàm f bởi công thức

$$m(r,f) = \log^+\mu(r,f) = \max\{0;\log\mu(r,f)\}.$$

Đặc biệt

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right) = \log^+\mu\left(r,\frac{1}{f}\right) = \log^+\frac{1}{\mu(r,f)} = \max\{0,-\log\mu(r,f)\}.$$

Hơn nữa,

$$\frac{1}{\log p} m\left(p^t,\frac{1}{f}\right) = \gamma^+(t,f) = \max\{0;\gamma(r,f)\}.$$

Tiếp theo ta xem xét một số tính chất đơn giản của hàm đếm và hàm xấp xỉ.

Mệnh đề 1.3. *Giả sử $f_i \in \mathcal{M}_{(p}(\mathbb{C}), (i = 1,2,\dots,k)$. Khi đó với mỗi $r > 0$, ta có*

$$N\left(r,\sum_{i=1}^k f_i\right) \le \sum_{i=1}^k N(r,f_i); \qquad N\left(r,\prod_{i=1}^k f_i\right) \le \sum_{i=1}^k N(r,f_i).$$

$$m\left(r,\sum_{i=1}^k f_i\right) \le \sum_{i=1}^k m(r,f_i); \qquad m\left(r,\prod_{i=1}^k f_i\right) \le \sum_{i=1}^k m(r,f_i).$$