ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

−−−−−−−−−−

LÊ BÍCH NGỌC

ĐA THỨC CÓ TRỌNG VÀ LÝ THUYẾT ĐA THẾ VỊ CÓ TRỌNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

———————————

LÊ BÍCH NGỌC

ĐA THỨC CÓ TRỌNG
VÀ LÝ THUYẾT ĐA THẾ VỊ CÓ TRỌNG

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS,TSKH NGUYỄN VĂN KHUÊ

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn Luận văn

Lý thuyết đa thế vị (không trọng), đặc biệt là hàm cực trị đa phức đã được nghiên cứu từ cuối những năm 70. Các kết quả cơ bản và sự ứng dụng của lý thuyết này có thể tìm trong hai công trình của Siciak và Bloom và sách chuyên khảo của Klimek.

Đặc biệt trong công trình của Siciak, Siciak là người đầu tiên đưa ra những nghiên cứu sơ bộ hàm cực trị có trọng. Gần đây Bloom và Levenberg đã giải một số bài toán mở quan trọng trong lý thuyết đa thế vị bởi sự nghiên cứu lý thuyết này trong trường hợp có trọng. Đó là lý do tôi chọn "Đa thức có trọng và lý thuyết đa thế vị có trọng" làm đề tài nghiên cứu của Luận văn.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc tài liệu từ các tạp chí toán học trong nước và quốc tế liên quan đến đa thức có trọng và lý thuyết đa thế vị có trọng. Qua đó, tìm hiểu và nghiên cứu về vấn đề này.

3. Mục đích của Luận văn

Mục đích của Luận văn này là trình bày công trình gần đây của Thomas Bloom về đa thức có trọng và lý thuyết đa thế vị có trọng.

4. Nội dung của Luận văn

Luận văn bao gồm phần Mở đầu, hai chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1. Trình bày một phần công trình của Siciak về cực trị hàm đa điều hòa dưới, đặc biệt các kết quả ban đầu về hàm cực trị .

Chương 2. Trình bày công trình của Bloom về đa thức có trọng và lý thuyết đa thế vị có trọng. Các kết quả đáng chú ý là ba Định lý 2.2.10, 2.3.4, 2.4.1.

Luận văn đã được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và nhiệt tình chỉ bảo của GS.TSKH Nguyễn Văn Khuê, Đại học sư phạm Hà Nội. Em xin được bày tỏ lòng biêt ơn sâu sắc đến Thầy. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán-trường Đại học sư phạm, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K18B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm Luận văn.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên Luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2012

Tác giả

Lê Bích Ngọc

Chương 1

HÀM CỰC TRỊ TRONG $\mathbb{C}^N$

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức liên quan tới việc chứng minh các kết quả của chương 2 như: Hàm đa điều hòa dưới, hàm L-cực trị, tập L-cực.

1.1 Hàm đa điều hòa dưới

1.1.1 Hàm nửa liên tục

Định nghĩa 1.1.1. *Giả sử X là không gian mêtric*

a) Hàm $u : X \to [-\infty; +\infty)$ gọi là nửa liên tục trên nếu tập hợp

$$\{x \in X : u(x) < \alpha\}$$

là mở với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$

b) Hàm $u : X \to (-\infty; +\infty]$ gọi là nửa liên tục dưới nếu tập hợp

$$\{x \in X : u(x) > \alpha\}$$

là mở với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$

Nhận xét. Từ định nghĩa trên ta có

a) Hiển nhiên nếu u là nửa liên tục trên nếu và chỉ nếu $-u$ là nửa liên tục dưới.

b) Hàm $u : X \to [-\infty; +\infty)$ gọi là nửa liên tục trên nếu và chỉ nếu

$$\limsup_{x \to a} u(x) = u(a),$$

xảy ra với mọi $a \in X$,

ở đây
$$\limsup_{x \to a} u(x) = \inf_{\varepsilon > 0} (\sup\{u(y) : y \in \overline{\mathbb{B}}(a, \varepsilon)\})$$

Thật vậy, giả sử u là nửa liên tục trên trên X. Ta cần chứng minh $\limsup_{x \to a} u(x) = u(a)$ xảy ra với mọi $a \in X$.

Cho $a \in X$, có thể coi $u(a) \neq -\infty$. Do u là nửa liên tục trên nên u nửa liên tục trên tại a. Suy ra với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại lân cận $U_a \subset X$ của a sao cho với mọi $x \in U_a$ ta có $u(x) < u(a) + \varepsilon$ nên $\sup\{u(x) : x \in U_a\} \leq u(a) + \varepsilon$. Từ đó, $\inf_{U_a} \sup\{u(x) : x \in U_a\} \leq u(a) + \varepsilon$. Vì ε nhỏ tùy ý nên suy ra $\limsup_{x \to a} u(x) = \inf_{U_a} \sup\{u(x) : x \in U_a\} \leq u(a)$.

Mặt khác hiển nhiên ta có:
$$u(a) \leq \limsup_{x \to a} u(x), \qquad \text{với mọi } a \in X$$

Vậy
$$\limsup_{x \to a} u(x) = u(a), \qquad \text{xảy ra với mọi } a \in X.$$

1.1.2 Hàm điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1.2. *Giả sử Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}$. Hàm $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ được gọi là hàm điều hòa dưới trên Ω nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau:*

(i) u là hàm nửa liên tục trên trên Ω.

(ii) Với mọi $w \in \Omega$, tồn tại $\rho > 0$ sao cho $\mathbb{B}(w, \rho) \subset \Omega$, ta có:
$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + re^{i\theta}) d\theta, \; 0 \leq r < \rho.$$

Ta đã biết rằng (ii) tương đương với (ii)': Với mọi $\omega \in \Omega$ và $\rho > 0$ sao cho $\overline{B}(\omega, \rho) \subset \Omega$, ta có
$$u(\omega) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\omega + re^{i\theta}) d\theta.$$

Tập tất cả các hàm điều hòa dưới trên Ω được ký hiệu bởi $SH(\Omega)$.

Định lý 1.1.3. *Giả sử u, v là hai hàm điều hòa dưới trên $\Omega \in \mathbb{C}$. Khi đó:*

(i) $h(z) = \max(u(z), v(z))$ là hàm điều hòa dưới trên Ω.

(ii) Với mọi số thực $\alpha, \beta > 0$, ta có:

$$h(z) = \alpha u(z) + \beta v(z), \text{là hàm điều hòa dưới trên } \Omega.$$

Chứng minh. Hiển nhiên $h(z) = \max\{u(z), v(z)\}$ là nửa liên tục trên trên Ω.

Mặt khác, lấy $z_0 \in \Omega$, tồn tại $\mathbb{B}(z_0, \rho) \subset \Omega$ sao cho

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta})d\theta, 0 \leq r < \rho,$$

$$v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta})d\theta, 0 \leq r < \rho.$$

Do đó

$$h(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta})d\theta, 0 \leq r < \rho.$$

Vậy $h(z)$ là hàm diều hòa dưới trên Ω.

(ii) Chứng minh tương tự (i). □

1.1.3 Hàm đa điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1.4. *Giả sử Ω là một tập con mở trong $\mathbb{C}^N$ và $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ là một hàm nửa liên tục trên, không đồng nhất $-\infty$ trên bất kỳ thành phần liên thông nào của Ω.*

Hàm u được gọi là đa điều hòa dưới trên Ω nếu với mỗi $a \in \Omega$ và $b \in \mathbb{C}^N$ hàm $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$ là hàm điều hòa dưới hoặc đồng nhất $-\infty$ trên mỗi thành phần liên thông của tập $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega\}$.

Tập tất cả các hàm đa điều hòa dưới trên Ω được ký hiệu bởi $PSH(\Omega)$.

Định lý 1.1.5. *Giả sử $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ là hàm nửa liên tục trên và không đồng nhất $-\infty$ trên mỗi thành phần liên thông của $\Omega \subset \mathbb{C}^N$. Khi đó $u \in PSH(\Omega)$ nếu và chỉ nếu với mỗi $a \in \Omega$ và $b \in \mathbb{C}^N$ sao cho $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$, ta có:*

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}b)d\theta.$$

Hơn nữa, tính đa điều hòa dưới có tính địa phương.

Chứng minh.

Điều kiện cần. Giả sử $u \in PSH(\Omega)$ cần chứng minh với $a \in \Omega$, $b \in \mathbb{C}^N$ sao cho $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$, ta có:

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta} b) d\theta.$$

Thật vậy, do $u \in PSH(\Omega)$ nên:

$$\begin{aligned} u : D \subset \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto u(a + \lambda b) \end{aligned}$$

là hàm điều hòa dưới trong đó

$$D = \{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega, b \in \mathbb{C}^N\}.$$

Do $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$, nên $\overline{\mathbb{B}}(0, 1) \subset D$. Khi đó theo định nghĩa của hàm điều hòa dưới, ta có:

$$v(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(0 + 1e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta} b) d\theta$$

với $v(\lambda) = u(a + \lambda b)$. Vậy

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta} b) d\theta.$$

Điều kiện đủ. Hiển nhiên nếu $u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta} b) d\theta$ với $a \in \Omega$, $b \in \mathbb{C}^N$ mà $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$ thì $u \in PSH(\Omega)$. Định lý được chứng minh. $\square$

1.2 Một vài họ các hàm đa điều hòa dưới trong $\mathbb{C}^N$

Cho tập con mở G của $\mathbb{C}^N$, ta ký hiệu $PSH(G)$ là tập tất cả các hàm đa điều hòa dưới trên G.

Chúng ta sẽ chú ý đặc biệt đến họ các hàm đa điều hòa dưới trên $\mathbb{C}^N$ sau đây:

$$L = \{u \in PSH(\mathbb{C}^N) : u(x) \leq \beta + \log(1 + |x|) \text{ trong } \mathbb{C}^N\},$$

$$L^+ = \{u \in PSH(\mathbb{C}^N) : \alpha + \log(1 + |x|) \leq u(x) \leq \beta + \log(1 + |x|) \text{ trong } \mathbb{C}^N\},$$

trong đó α và β là các hằng số thực phụ thuộc vào u, và $|x| = \max_{1\le j\le N} |x_j|$ với mọi $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{C}^N$.

Tập L được gọi là lớp Lelong trong $\mathbb{C}^N$.

Hiển nhiên rằng $L^+ \subset L$ và cả hai họ trên đều là các tập con lồi của $PSH(\mathbb{C}^N)$. Các phần tử của L được gọi là hàm đa điều hòa dưới với cấp tăng cực tiểu loại 1

Để ý rằng nếu f là đa thức khác 0 của N biến phức với bậc $\le n$, thì $(\frac{1}{n})\log|f| \in L$. Thật vậy, đặt $M = \sup\{|f(x)| : |x| \le 1\}$; theo bất đẳng thức Cauchy:

$$|f(x)| \le M(1 + |x| + ... + |x|^n) \le M_1(1 + |x|^n), \qquad M_1 = \text{const} > 0,$$

kéo theo kết quả trên.

Đặt $\omega(x) = C_N \exp(-\frac{1}{1-|x|^2})$ với $|x| \le 1$ và $\omega(x) = 0$ với $|x| \ge 1$ với hằng số dương C_N được chọn sao cho $\int \omega(x)dx = 1$, phép lấy tích phân được lấy với độ đo Lebesgue $2N-$chiều trong $\mathbb{C}^N$. Cho $\lambda > 0$ bất kỳ, đặt $\omega_\lambda(x) = \lambda^{-2N}\omega(\lambda^{-1}x)$. Từ đó $\int \omega_\lambda(x)dx = 1$ và $\omega_\lambda(x) = 0$ với $|x| \ge \lambda$

Mệnh đề 1.2.1. *Nếu $u \in L$ ($u \in L^+$), thì $u_\lambda = u * \omega_\lambda$ được cho bởi:*

$$(u * \omega_\lambda)(x) = \int u(x+y)\omega_\lambda(y)dy, \qquad x \in \mathbb{C}^N,$$

là một $\mathscr{C}^\infty$-hàm trong $\mathbb{C}^N$ thuộc L (L^+). Hơn nữa,

$$u_\lambda \downarrow u \qquad \textit{khi } \lambda \downarrow 0$$

***Chứng minh**.* Ta đã biết rằng u_λ là $\mathscr{C}^\infty$-hàm, $u_\lambda \in PSH(\mathbb{C}^N)$ và $u_\lambda \downarrow u$ khi $\lambda \downarrow 0$ trong $\mathbb{C}^N$. Từ định nghĩa của u_λ ta suy ra rằng $u_\lambda \in L$ (tương ứng $u_\lambda \in L^+$) □

Mệnh đề 1.2.2. *Cho hàm $u \in L^+$, đặt $\delta = e^{-u}$ và*

$$\delta_\lambda(x) = \inf_{y\in\mathbb{C}^N}[\delta(y) + (\frac{1}{\lambda})|y-x|], x \in \mathbb{C}^N, \lambda > 0$$

Khi đó

(i) $|\delta_\lambda(x) - \delta_\lambda(y)| \le (\frac{1}{\lambda})|x-y|, x, y \in \mathbb{C}^N$;
(ii) $u_\lambda = -\log\delta_\lambda \in L^+$ nếu $0 < \lambda < e^\beta$;
(iii) $u_\lambda \downarrow u$ trong $\mathbb{C}^N$ khi $\lambda \downarrow 0$