ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU PHƯƠNG

PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU PHƯƠNG

PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ HỌC

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS. TSKH Hà Huy Khoái**

THÁI NGUYÊN - 2012

Mục lục

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Khái niệm ánh xạ bảo giác là một trong những khái niệm quan trọng nhất của toán học và là một trong những phần lý thú của lý thuyết hàm biến phức. Bài toán cơ bản và khó nhất của lý thuyết ánh xạ bảo giác là tìm hàm chỉnh hình thực hiện ánh xạ bảo giác miền cho trước lên miền cho trước. Bài toán này có ý nghĩa thực hành rất lớn, tuy nhiên cho đến ngày nay người ta chưa có những phương pháp đủ hiệu lực để giải nó, nhưng trong nhiều trường hợp đơn giản nhất (nhưng cũng đầy thú vị) bài toán có thể giải nhờ các hàm số sơ cấp biến phức.

Đặc biệt năm 2005, GS. Darren Crowdy đã có một công trình đột phá về việc ánh xạ bảo giác miền đa giác đa liên lên nửa mặt phẳng phức (công thức Schwart-Christoffel cho trường hợp đa liên), một công cụ vô cùng quan trọng cho tất cả các nhà toán học, kỹ sư cũng như các nhà khoa học khi muốn chiếu các thông tin về hình khối phức tạp thành các hình dạng đơn giản như hình tròn để dễ dàng hơn trong việc phân tích. Kết quả trên còn được sử dụng trong nhiều lĩnh vực khác, chẳng hạn trong mô hình hóa và trực quan hóa các cấu trúc phức tạp của hệ thần kinh. Trong luận văn này, chúng ta mới sử dụng công thức Schwart-Christoffel cho miền đơn liên.

Và nếu như trước đây một số các kỹ thuật giải tích được giới sinh viên toán ứng dụng dùng đến nhiều hơn so với phương pháp chiếu bảo giác, ví dụ như các phương pháp cổ điển để giải các bài toán cơ học continuum, tĩnh điện, hay các lĩnh vực sử dụng phương trình Laplace và Poission hai chiều, nhưng với những gì mà tính chất phép biến hình bảo giác và nhờ các hàm số sơ cấp biến phức thì chúng ta đã giải quyết được nhiều bài toán ứng dụng trong trường tĩnh điện và cơ học chất lỏng,...

Xuất phát từ thực tế đó, sau khi tiến hành nghiên cứu về một vài ứng dụng của phép biến hình bảo giác, tôi đã chọn đề tài với một vài bài toán ứng dụng phép biến hình bảo giác đã được mở rộng, mô phỏng lên phần nào các chuyển động của dòng nước trong cơ học chất lỏng.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc tài liệu từ các tạp chí, giáo trình trong nước và quốc tế có liên quan đến phép biến hình bảo giác và các ứng dụng của phép biến hình bảo giác trong chuyển động cơ học. Từ đó, tìm hiểu mở rộng để nghiên cứu vấn đề của đề tài này

3. Mục đích của luận văn

Mục đích của luận văn này là trình bày một số ứng dụng của phép biến hình bảo giác trong một số lớp bài toán quan trọng của cơ học, cụ thể là bài toán chuyển động của nước ngầm dưới các công trình thủy lợi. Từ đó có thể giúp các nhà nghiên cứu, làm thế nào để xây dựng được một công trình thủy lợi đạt chất lượng tốt nhất.

4. Nội dung của luận văn

Luận văn gồm bốn chương

Chương 1: Trình bày khái niệm phép biến hình bảo giác và một số phép biến hình bảo giác quan trọng trong giải tích phức.

Chương 2: Giới thiệu về phương trình chuyển động nước thấm và các vấn đề liên quan như vận tốc thấm, quy luật thấm. Từ đó đưa ra bài toán thấm phẳng đồng chất.

Chương 3: Trình bày ứng dụng phép biến hình bảo giác vào giải quyết bài toán thấm có áp dưới các công trình thủy lợi bằng cách tìm hàm biến hình bảo giác miền thế vị phức lên miền thấm.

Chương 4: Trình bày ứng dụng phép biến hình bảo giác vào giải quyết bài toán thấm không áp dưới các công trình thủy lợi. Trong bài toán này do miền thấm chưa xác định nên phải sử dụng hàm Giucốpxki sao cho miền giá trị của nó là xác định. Sau đó ta tìm hàm biến hình bảo giác miền thế vị phức lên miền xác định đó. Từ đó ta tìm được quan hệ giữa miền thấm và hàm thế vị phức.

Để hoàn thành được luận văn này, tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến GS. TSKH Hà Huy Khoái, người thầy đã hướng dẫn và tận tình chỉ bảo tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu đề tài.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo trong trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, Viện Toán học, Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và giúp đỡ tác giả hoàn thành khóa học.

Đồng thời tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Tuyên Quang, trường phổ thông Dân tộc nội trú – THPT tỉnh Tuyên Quang, các bạn trong lớp cao học K18B, gia đình và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện về mọi mặt để giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên tháng 08 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Thị Thu Phương

Chương 1

PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC VÀ MỘT SỐ HÀM SƠ CẤP CƠ BẢN

1.1 KHÁI NIỆM VỀ PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC

1.1.1. Định nghĩa:

Một phép biến hình được gọi là bảo giác nếu nó có các tính chất sau:

- Bảo toàn góc giữa hai đường cong bất kì đi qua z (kể cả độ lớn và hướng)

- Có hệ số co dãn không đổi tại điểm đó, nghĩa là mọi đường cong đi qua z đều có hệ số co dãn như nhau qua phép biến hình.

Nếu phép biến hình là bảo giác tại mọi điểm của miền G thì nó được gọi là bảo giác trong miền G.

1.1.2. Phép biến hình thực hiện bởi hàm giải tích:

Cho hàm w = f(z) đơn diệp, giải tích trong miền G. Do ý nghĩa hình học của $f'(z)$ ta thấy rằng phép biến hình được thực hiện bởi hàm w = f(z) là bảo giác tại mọi điểm mà $f'(z) \neq 0$.

Nếu chỉ xét trong một lân cận nhỏ của điểm z, thì phép biến hình bảo giác là một phép đồng dạng do tính chất bảo toàn góc. Các góc tương ứng trong hai hình là bằng nhau. Mặt khác nếu xem hệ số co dãn là không đổi thì tỉ số giữa hai cạnh tương ứng là không đổi.

Ngược lại người ta chứng minh được rằng phép biến hình w = f(z) đơn diệp là bảo giác trong miền G thì hàm w = f(z) giải tích trong G và có đạo hàm $f'(z) \neq 0$.

1.1.3. Bổ đề Schwarz:

Giả sử hàm f(z) giải tích trong hình tròn | z | < R và f(0) = 0. Nếu | z | ≤ M với mọi z mà | z | < R thì ta có:

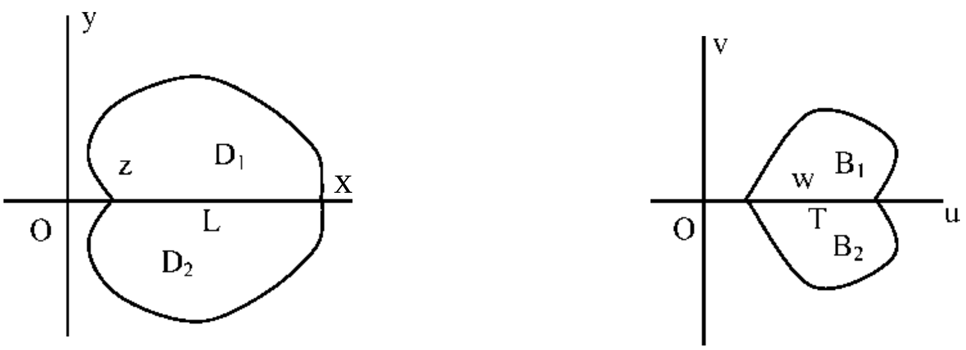
$$|f(z)| \le \frac{M}{R}|z|, \quad |z| < R$$

trong đó đẳng thức xảy ra tại z_1 với 0 < | z | < R chỉ khi $f(z) = \frac{Me^{i\alpha}}{R}z$, α thực.

1.1.4. Nguyên lí đối xứng:

Trước hết ta thừa nhận một tính chất đặc biệt của hàm biến phức mà hàm biến số thực không có, đó là tính duy nhất, được phát biểu như sau: *Giả sử hai hàm f(z) và g(z) cùng giải tích trong miền D và thoả mãn f(z) = g(z) trên một cung L nào đó nằm trong D, khi đó f(z) = g(z) trên toàn miền D.*

Giả sử D_1 và D_2 nằm kề nhau và có biên chung là L



Hình 1.1

Giả sử $f_1(z)$ giải tích trong D_1 và $f_2(z)$ giải tích trong D_2. Nếu $f_1(z) = f_2(z)$ trên L thì ta gọi $f_2(z)$ là thác triển giải tích của $f_1(z)$ qua L sang miền D_2. Theo tính duy nhất của hàm giải tích nếu $f_3(z)$ cũng là thác triển giải tích của $f_1(z)$ qua L sang miền D_2 thì ta phải có $f_3(z) = f_2(z)$ trong D_2. Cách nhanh nhất để tìm thác triển giải tích của một hàm cho trước là áp dụng nguyên lí đối xứng sau đây:

Giả sử biên của miền D_1 chứa một đoạn thẳng L và $f_1(z)$ biến bảo giác D_1 lên B_1 trong đó L chuyển thành đoạn thẳng T thuộc biên của B_1. Khi đó *tồn tại thác triển giải tích $f_2(z)$ của $f_1(z)$ qua L sang miền D_2 nằm đối xứng với D_1 đối với L. Hàm $f_2(z)$ biến bảo giác D_2 lên B_2 nằm đối xứng với B_1 đối với T và hàm:*

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z) & \text{trong } D_1 \\ f_1(z)=f_2(z) & \text{trên } L \\ f_2(z) & \text{trong } D_2 \end{cases}$$

biến bảo giác D thành B.

Nguyên lí đối xứng thường dùng để tìm phép biến hình bảo giác hai miền đối xứng cho trước.

1.2. PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC QUA MỘT SỐ HÀM SƠ CẤP

1.2.1. Phép biến hình tuyến tính

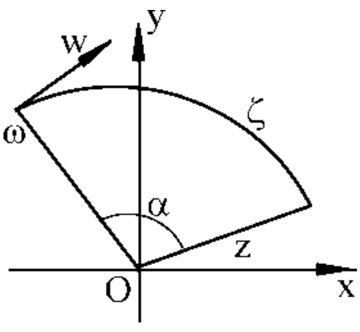
Xét hàm tuyến tính w = az + b trong đó a, b là các hằng số phức, $a \neq 0$. Nếu $a = |a|e^{i\alpha}$ thì w = $|a|e^{i\alpha}z$ + b. Phép biến hình tuyến tính là bảo giác trong toàn mặt phẳng phức vì $f'(z) = a \neq 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Hàm tuyến tính có thể coi là hợp của 3 hàm sau:

$$\zeta = kz \ (k = |a| > 0)$$

$$\omega = e^{i\alpha}.\zeta \ \ (\alpha = \mathrm{Arg}a)$$

$$w = \omega + b$$

Nếu biểu diễn các điểm ζ, ω, w trong cùng một mặt phẳng thì dựa vào ý nghĩa hình học của phép nhân và phép cộng các số phức ta suy ra rằng:



Hình 1.2

- Điểm ζ nhận được từ điểm z bằng phép co dãn với hệ số k

- Điểm ω nhận được từ điểm ζ bằng phép quay tâm O, góc quay α.

- Điểm w nhận được từ điểm ω bằng phép tịnh tiến xác định bởi vectơ biểu diễn số phức b.