ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THÙY LINH

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN CỦA CÁC ÁNH XẠ CHUẨN TẮC NHIỀU BIẾN PHỨC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

−−−−−−−−−−

NGUYỄN THỊ THÙY LINH

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN CỦA CÁC ÁNH XẠ CHUẨN TẮC NHIỀU BIẾN PHỨC

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS TS PHẠM VIỆT ĐỨC

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

Mở đầu

Một họ các ánh xạ liên tục giữa hai đa tạp M và N được gọi là chuẩn tắc nếu nó chứa một dãy con hoặc là compact tương đối trong $\mathcal{C}(M, N)$ hoặc là phân kỳ compact. Việc sử dụng các họ chuẩn tắc để nghiên cứu tính hyperbolic của các đa tạp phức đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu như S. Kobayashi, S. Lang, P.J. Kiernan, T.J. Barth, P.Gauthier, ... Nhiều kết quả đẹp đẽ về họ chuẩn tắc đã được chứng minh. Bằng việc tổng quát các khái niệm cổ điển về các hàm chuẩn tắc, các hàm Bloch, các dãy chính quy và các dãy P - điểm trong giải tích phức một biến lên trong trường hợp các ánh xạ chỉnh hình giữa các đa tạp phức, K.T. Hahn [6] đã chứng minh được mối liên hệ giữa các khái niệm trên và từ đó đưa ra được các kết quả thú vị về dáng điệu tiệm cận của các ánh xạ chuẩn tắc, ánh xạ Bloch và tổng quát hơn là ánh xạ chỉnh hình không chuẩn tắc dọc theo các dãy P - điểm, các dãy chính quy và quỹ đạo tiệm cận tới biên của đa tạp phức M.

Mục đích của luận văn là học tập, nghiên cứu và trình bày lại các kết quả trên của K.T. Hahn.

Luận văn gồm 2 chương:

Chương 1 trình bày các kiến thức chuẩn bị về giả khoảng cách Kobayashi, không gian phức hyperbolic, không gian phức hyperbolic đầy đủ và giả metric vi phân Kobayashi.

Chương 2 là nội dung chính của Luận văn, trình bày một số kết quả về ánh xạ chuẩn tắc, ánh xạ chuẩn tắc vào các đa tạp phức compact, một số tính chất cơ bản, mở rộng của ánh xạ chuẩn tắc và cuối cùng là dáng điệu tiệm cận của các ánh xạ Bloch.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Để hoàn thành được bản Luận văn này, trước hết tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới PGS.TS Phạm Việt Đức, người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm và hoàn thành Luận văn. Tôi cũng xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn tới các thầy cô giáo trong khoa Toán, Trường Đại học sư phạm Thái Nguyên, Viện Toán học Việt Nam, Trường Đại học sư phạm Hà Nội đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin cảm ơn tới gia đình và bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và làm Luận văn tốt nghiệp.

Luận văn chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế, rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2012
Học viên
Nguyễn Thị Thùy Linh

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Giả khoảng cách Kobayashi

Trên đĩa đơn vị $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ cho metric Bergman - Poincaré

$$\rho_\Delta = ln\frac{1+|a|}{1-|a|} \text{ với } a \in \Delta.$$

1.1.1 Định nghĩa

Giả sử X là một không gian phức, x và y là hai điểm tùy ý của X. $Hol(\Delta, X)$ là tập tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ Δ vào X, được trang bị tô pô compact mở. Xét dãy các điểm $p_0 = x, p_1, ..., p_k = y$ của X, dãy các điểm $a_1, a_2, ..., a_k$ của Δ và dãy các ánh xạ $f_1, ..., f_k$ trong $Hol(\Delta, X)$ thỏa mãn

$$f_i(0) = p_{i-1}, f_i(a_i) = p_i, \forall i = 1, ..., k.$$

Tập hợp $\alpha = \{p_0, ..., p_k, a_1, ..., a_k, f_1, ..., f_k\}$ thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là một dây chuyền chỉnh hình nối x và y trong X.

Ta định nghĩa

$$d_X(x, y) = \inf_\alpha \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \rho_\Delta(0, a_i), \quad \alpha \in \Omega_{x,y} \Big\},$$

trong đó $\Omega_{x,y}$ là tập hợp tất cả các dây chuyền chỉnh hình nối x và y trong X.

Khi đó $d_X : X \times X \to R$ là một giả khoảng cách trên X và gọi là giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức X.

Tổng $\sum_{i=1}^{k} \rho_\Delta(0, a_i)$ được gọi là tổng Kobayashi của dây chuyền chỉnh hình α.

Nhận xét: *Nếu X là liên thông thì với mọi $x, y \in X$, luôn tồn tại dây chuyền chỉnh hình trong X nối x với y.*

Thật vậy, lấy $x \in X$ và gọi Z là tập gồm tất cả các điểm trong X mà có thể nối với x bởi một dây chuyền chỉnh hình. Ta sẽ chứng minh Z vừa là tập mở vừa là tập đóng.

Nếu X là đa tạp phức thì hiển nhiên $Z = X$.

Nếu X là không gian phức. Lấy $z \in Z$. Theo định lý Hironaka về giải kỳ dị, tồn tại lân cận U của z và một ánh xạ chỉnh hình toàn ánh, riêng

$$\pi : M \to U,$$

với M là đa tạp phức có hữu hạn thành phần liên thông và π là đẳng cấu chỉnh hình bên ngoài tập các điểm kỳ dị của X trong U. Vì X là đa tạp phức, và vì π là toàn ánh nên Z là mở.

Để chứng minh Z đóng ta lấy một dãy $\{y_n\}$ trong Z và

$$y_n \to z \in X.$$

Ta lại lấy một lân cận U của z và giải kỳ dị

$$\pi : M \to U.$$

Với n đủ lớn ta có $y_n \in U$. Vì π là toàn ánh, ta có thể nâng $\{y_n\}$ thành $\{u_n\} \subset M$. Do $\{y_n, z\}$ là tập compact và π là ánh xạ riêng nên

$$\{\pi^{-1}(y_n), \pi^{-1}(z)\}$$

là tập compact.

Từ đó ta có thể trích được dãy con hội tụ cũng kí hiệu là $\{u_n\}$, tới điểm $u \in M$ và $\pi(u) = z$. Vì M là đa tạp nên tồn tại dây chuyền chỉnh hình trong M nối u với u_n. Vậy qua π, tồn tại dây chuyền chỉnh hình nối y_n với z với n đủ lớn. Mà y_n nối được với x bởi một dây chuyền chỉnh hình, do đó có dây chuyền chỉnh hình nối z với x. Suy ra $z \in Z$. Vậy Z đóng. Mà X liên thông nên $Z = X$.

1.1.2 Một số tính chất của giả khoảng cách Kobayashi

a) Nếu $f : X \to Y$ là ánh xạ chỉnh hình giữa hai không gian phức thì f làm giảm khoảng cách đối với giả khoảng cách Kobayashi, nghĩa là

$$d_X(x, y) \geq d_Y(f(x), f(y)) \ \forall x, y \in X.$$

Hơn nữa, d_X là giả khoảng cách lớn nhất trên X thỏa mãn mọi ánh xạ chỉnh hình $f : \Delta \to X$ là giảm khoảng cách.

b) + $d_\Delta \equiv \rho_\Delta$.

+ $d_{\mathbb{C}^m} \equiv 0$.

c) Đối với bất kì các không gian phức X, Y, ta có

$$d_{X\times Y}((x, y), (x', y')) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}$$

với mọi $x, x' \in X$ và mọi $y, y' \in Y$.

d) Giả sử X là không gian phức. Khi đó, giả khoảng cách Kobayashi $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục.

Chứng minh.

Theo bất đẳng thức tam giác ta có

$$|d_X(x_n, y_n) - d_X(x, y)| \leq d_X(x_n, x) + d_X(y_n, y)$$

với mọi $x_n, y_n, x, y \in X$. Do đó để chứng minh tính liên tục của d_X ta chỉ cần chứng minh $d_X(y_n, y) \to 0$ khi $y_n \to y$.

a) Trường hợp X là đa tạp phức.

Gọi U là một lân cận tọa độ quanh y mà song chỉnh hình với Δ^n, $n = dimX$. Ta có

$$d_{\Delta^n}((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \max\{d_\Delta(x_i, y_i), i = 1, ..., n\}.$$

Vì U song chỉnh hình với Δ^m nên theo tính chất giảm khoảng cách của giả khoảng cách Kobayashi ta có $d_U = d_{\Delta^m}$ liên tục. Do đó, $d_X(y_n, y) \leq d_U(y_n, y) \to 0$ khi $y_n \to y$. Vậy d_X liên tục.

b) Trường hợp y là điểm kỳ dị.

Theo định lý Hironaka về giải kỳ dị, tồn tại lân cận mở U của y trong X và ánh xạ chỉnh hình riêng, toàn ánh $\pi : M \to U$, với U là đa tạp phức. Vì $y_n \to y$ nên tồn tại lân cận compact tương đối V của y sao cho $V \subset \overline{V} \subset U$ và $y_n \in V$. Do π là toàn ánh riêng nên $\pi^{-1}(V)$ là compact tương đối trong M. Vì vậy, tồn tại dãy $\{z_n\} \subset M$ sao cho $\pi(z_n) = y_n$ và $z_n \to z \in M$. Rõ ràng $\pi(z) = y$.

Theo a), vì M là đa tạp phức, ta có

$$d_M(z_n, z) \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Từ đó, theo tính chất giảm khoảng cách của giả khoảng cách Kobayashi ta có

$$d_X(y_n, y) \le d_U(y_n, y) \le d_M(z_n, z) \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy d_X là hàm liên tục. $\square$

1.2 Không gian phức hyperbolic

1.2.1 Định nghĩa

Không gian phức X được gọi là không gian hyperbolic (theo nghĩa Kobayashi) nếu giả khoảng cách Kobayashi d_X là khoảng cách trên X, tức là

$$d_X(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q,\ \forall p, q \in X.$$

1.2.2 Một số tính chất của không gian phức hyperbolic

a) Nếu X,Y là các không gian phức, thì $X \times Y$ là không gian hyperbolic nếu và chỉ nếu cả X và Y đều là không gian hyperbolic.

b) Giả sử X là không gian con phức của không gian phức Y. Nếu Y là hyperbolic thì X cũng là hyperbolic. Hay nói cách khác, không gian con của không gian hyperbolic là hyperbolic.

c) (Định lý Barth) Giả sử X là không gian phức liên thông. Nếu X là hyperbolic thì d_X sinh ra tô pô tự nhiên của X.

Chứng minh.

Ta có không gian phức X là compact địa phương với tô pô đếm được, do đó nó metric hóa được bởi định lý metric hóa Urưxơn. Vì vậy có hàm khoảng cách ρ xác định tô pô tự nhiên của X. Ta phải chứng minh d_X và ρ là so sánh được, tức là với $\{x_n\} \subset X$ ta có

$$\rho(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow d_X(x_n, x) \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do d_X liên tục nên từ $\rho(x_n, x) \to 0$ suy ra $d_X(x_n, x) \to 0$ khi $n \to \infty$.

Ngược lại, giả sử $d_X(x_n, x) \to 0$ mà $\rho(x_n, x) \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó tồn tại $s > 0$ sao cho có dãy con (vẫn ký hiệu là $\{x_n\}$) mà các x_n nằm ngoài ρ- cầu tâm x, bán kính s.

Nối x_n với x bởi một dây chuyền chỉnh hình. Gọi γ là ảnh của các trắc địa trong đĩa qua dây chuyền trên, $\gamma : [a, b] \to X$.

Xét hàm $t \mapsto \rho(\gamma(t), x)$, đây là một hàm liên tục do đó tồn tại $t_0 \in [a, b]$ sao cho $\rho(\gamma(t_0), x) = s$. Vậy điểm $y_n = \gamma(t_0)$ nằm trên mặt cầu tâm x bán kính s (đối với metric ρ). Từ đó theo định nghĩa giả khoảng cách Kobayashi ta có

$$d_X(y_n, x) \leq d_X(x_n, x) \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do tính compact địa phương, dãy $\{y_n\}$ có dãy con $\{y_{n_k}\}$ hội tụ tới y thuộc mặt cầu tâm x, bán kính s.

Khi đó,

$$d_X(y, x) = \lim_{n \to \infty} d_X(y_{n_k}, x) = 0,$$

mà $y \neq x$. Điều này mâu thuẫn tới giả thiết X là không gian hyperbolic. $\square$

d) (Bổ đề Eastwood) Giả sử $\pi : X \to Y$ là ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức. Giả sử Y là hyperbolic và với mỗi điểm $y \in Y$ có lân cận U của y sao cho $\pi^{-1}(U)$ là hyperbolic. Khi đó X là hyperbolic.