ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ TÂM

PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC Á TUYẾN TÍNH CẤP HAI VỚI HAI BIẾN ĐỘC LẬP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ TÂM

PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC Á TUYẾN TÍNH CẤP HAI VỚI HAI BIẾN ĐỘC LẬP

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Hà Tiến Ngoạn

THÁI NGUYÊN – 2012

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn Luận văn

Phương trình đạo hàm riêng cấp hai loại elliptic có một quá trình phát triển lâu dài. Trường hợp phương trình với hai biến độc lập có một mối liên quan chặt chẽ với lý thuyết hàm chỉnh hình và ánh xạ bảo giác trên mặt phẳng phức.

Mục tiêu của Luận văn là trình bày lý thuyết phương trình elliptic á tuyến tính cấp hai với hai biến độc lập. Khác với trường hợp khi số biến lớn hơn hoặc bằng ba, trong trường hợp hai biến, người ta không đòi hỏi các hệ số của phương trình là các hàm trơn, mà chỉ cần là các hàm liên tục.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các kết quả và phương pháp của lý thuyết ánh xạ á bảo giác và của lý thuyết phương trình elliptic cấp hai tuyến tính cùng với phương pháp lặp.

3. Mục đích của Luận văn

Trình bày các tính chất định tính về độ trơn của nghiệm phương trình elliptic á tuyến tính cấp hai với hai biến độc lập.

4. Nội dụng của luận văn

Nội dung chủ yếu của Luận văn được dựa vào một chương của tài liệu [1]. Trong chương 1 Luận văn đã trình bày khái niệm ánh xạ á bảo giác cùng với các đánh giá tiên nghiệm trong lớp Holder của chúng.

Các kết quả trong chương 1 đã được áp dụng trong chương 2 vào các đánh giá tiên nghiệm và tính giải được của bài toán Dirichlet cho phương trình á tuyến tính elliptic đều và không đều. Đối với trường hợp elliptic không đều, bài toán Dirichlet chỉ được xét trong các miền lồi với dữ kiện biên thoả mãn *điều kiện độ nghiêng bị chặn*. Luận văn cũng đã chỉ ra rằng *điều kiện độ nghiêng bị chặn* là tương đương với *điều kiện ba điểm*.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo nhiệt tình của PGS.TS. Hà Tiến Ngoạn, Viện toán học. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán – trường Đại học sư phạm, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K18B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm Luận văn.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên Luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2012

Tác giả

Trần Thị Tâm

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Lớp hàm Holder

1.1.1. Liên tục Holder

Định nghĩa 1.1. *Cho* x_0 *là một điểm trong* $\mathbb{R}^n$ *và* f *là một hàm xác định trên miền bị chặn* D *chứa* x_0. *Nếu* $0 < \alpha < 1$, *ta nói rằng* f *là liên tục Holder với số mũ* α *tại* x_0 *nếu:*

(1.1)
$$[f]_{\alpha;x_0} = \sup_{\substack{x \in D \\ x \neq x_0}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{\alpha}}$$

hữu hạn. Ta gọi $[f]_{\alpha;x_0}$ *là hệ số Holder bậc α của* f *tại* x_0.

Nếu f là liên tục Holder tại x_0 thì f liên tục tại x_0. Khi (1.1) là hữu hạn với $\alpha = 1$, f là liên tục Lipschitz tại x_0.

Ví dụ 1.2. Hàm f trên $B_1(0)$ được cho bởi $f(x) = |x|^{\beta}$, $0 < \beta < 1$ là liên tục Holder với số mũ β và liên tục Lipschitz khi $\beta = 1$, trong đó $B_1(0)$ là hình cầu đơn vị.

Định nghĩa 1.3. *Ta nói* f *là liên tục đều Holder trong* D *với số mũ* α *nếu đẳng thức:*

(1.2) $$[f]_{\alpha;D} = \sup_{\substack{x,y\in D\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}, \quad 0<\alpha\leq 1,$$

hữu hạn. Ta nói f là liên tục Holder địa phương với số mũ α trong D nếu f là liên tục đều Holder với số mũ α trên mọi tập con compact của D.

1.1.2. Không gian $C^{k,\alpha}(\Omega)$

Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và k là một số nguyên không âm. $C^{k,\alpha}(\Omega)$ là không gian các hàm $f\in C^k(\Omega)$ mà các đạo hàm riêng cấp k liên tục Holder với số số mũ α trong Ω. Để đơn giản ta viết:

$$C^{0,\alpha}(\Omega)=C^{\alpha}(\Omega), \quad C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})=C^{\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Và ta hiểu rằng với $0<\alpha<1$ ký hiệu này được sử dụng bất cứ khi nào, trừ khi có quy ước khác.

Cũng như vậy, ta đặt:

$$C^{k,0}(\Omega)=C^{k}(\Omega), \quad C^{k,0}(\overline{\Omega})=C^{k}(\overline{\Omega}).$$

Chúng bao gồm các không gian $C^k(\Omega)$, $\left(C^k(\overline{\Omega})\right)$ trong số các không gian $C^{k,\alpha}(\Omega)$, $\left(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})\right)$ với $0\leq\alpha\leq 1$. Ta cũng ký hiệu $C_0^{k,\alpha}(\Omega)$ là không gian các hàm trên $C^{k,\alpha}(\Omega)$ có giá compact trong Ω.

Ta đặt:

(1.3) $$\begin{aligned} [u]_{k,0;\Omega} &= |D^k u|_{0;\Omega} = \sup_{|\beta|=k}\sup_{\Omega}|D^{\beta}u|, \quad k=0,1,2,\ldots \\ [u]_{k,\alpha;\Omega} &= |D^k u|_{\alpha;\Omega} = \sup_{|\beta|=k}\left[D^{\beta}u\right]_{\alpha;\Omega}. \end{aligned}$$

Với những nửa chuẩn này, ta định nghĩa các chuẩn tương ứng:

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = |u|_{k;\Omega} = |u|_{k,0;\Omega} = \sum_{j=0}^{k}[u]_{j,0;\Omega} = \sum_{j=0}^{k}\left[D^j u\right]_{0;\Omega},$$
(1.4)
$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = |u|_{k,\alpha;\Omega} = |u|_{k;\Omega} + [u]_{k,\alpha;\Omega} = |u|_{k;\Omega} + \left[D^k u\right]_{\alpha;\Omega},$$

trên các không gian $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ tương ứng. Đặc biệt, đôi lúc ta đưa vào các chuẩn không thứ nguyên trên $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$: nếu Ω bị chặn, với d là đường kính của Ω, ta đặt,

$$\|u\|'_{C^k(\overline{\Omega})} = |u|'_{k;\Omega} = \sum_{j=0}^{k} d^j [u]_{j,0;\Omega} = \sum_{j=0}^{k} d^j \left[D^j u\right]_{0;\Omega},$$
(1.5)
$$\|u\|'_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = |u|'_{k,\alpha;\Omega} = |u|'_{k;\Omega} + d^{k+\alpha}[u]_{k,\alpha;\Omega} = |u|'_{k;\Omega} + d^{k+\alpha}\left[D^k u\right]_{\alpha;\Omega}.$$

Các không gian $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ với các chuẩn tương ứng là những không gian Banach.

Ta chú ý rằng, tích các hàm liên tục Holder cũng liên tục Holder. Thật vậy, nếu $u \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right), v \in C^\beta\left(\overline{\Omega}\right)$, ta có $uv \in C^\gamma\left(\overline{\Omega}\right)$ trong đó $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, và

$$\|uv\|_{C^\gamma(\overline{\Omega})} \le \max\left(1, d^{\alpha+\beta-2\gamma}\right)\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\|v\|_{C^\beta(\overline{\Omega})};$$
(1.6)
$$\|uv\|'_{C^\gamma(\overline{\Omega})} \le \|u\|'_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\|v\|'_{C^\beta(\overline{\Omega})}.$$

1.2 Đánh giá đối với ánh xạ á bảo giác.

Nhiều khái niệm và phương pháp khác nhau trong lý thuyết hàm đóng vai trò đặc biệt trong lý thuyết của các phương trình elliptic hai biến. Ở đây chủ yếu quan tâm đến đánh giá tiên nghiệm phát sinh từ lý thuyết của ánh xạ á bảo giác. Một ánh xạ khả vi liên tục $p = p(x,y), q = q(x,y)$ từ một miền Ω

trong mặt phẳng $z=(x,y)$ tới mặt phẳng $w=(p,q)$ là *á bảo giác* hay $K-$*á bảo giác*, trong miền Ω nếu với mỗi hằng số $K>0$, ta có:

(1.7) $$p_x^2+p_y^2+q_x^2+q_y^2\le 2K\left(p_xq_y-p_yq_x\right)$$

với mọi $(x,y)\in\Omega$. Mặc dù bất đẳng thức (1.7) thỏa mãn cho p và q trong $C^1(\Omega)$, trong phần này kết quả được phát triển cho p, q liên tục và có đạo hàm yếu bình phương khả tích.

Khi $K<1$, (1.7) kéo theo p và q là hằng số và do đó ta giả thiết $K\ge 1$. Với $K=1$, ánh xạ $w(z)=p(z)+iq(z)$ là một hàm giải tích của z. Khi $K\ge 1$ bất đẳng thức (1.7) có ý nghĩa hình học là tại mọi điểm không triệt tiêu của Jacobian thì ánh xạ này giữa mặt phẳng z và mặt phẳng w sẽ bảo toàn định hướng và ánh xạ đường tròn đủ nhỏ vào các đường elliptic đủ nhỏ với tâm sai bị chặn đều, trong đó tỉ số của trục nhỏ tới trục lớn là bị chặn dưới bởi $\alpha=K-\left(K^2-1\right)^{1/2}>0$.

Ta sẽ quan tâm đến lớp các ánh xạ tổng quát hơn $(x,y)\to(p,q)$ xác định bởi bất đẳng thức:

(1.8) $$p_x^2+p_y^2+q_x^2+q_y^2\le 2K\left(p_xq_y-p_yq_x\right)+K'$$

trong đó K, K' là hằng số, với $K\ge 1$, $K'\ge 0$. Mặc dù ý nghĩa hình học là không giống nhau, ta sẽ gọi các ánh xạ tuân theo (1.8) là $(K,K')-$*á bảo giác*. Trong sự phát triển tiếp theo, ta thấy rằng các ánh xạ thỏa mãn (1.7) và (1.8) phát sinh từ phương trình elliptic hai biến với p và $-q$ biểu diễn các đạo hàm cấp một của nghiệm.

Mục đích của phần này là đưa ra các đánh giá tiên nghiệm trong lớp Holder cho ánh xạ $(K,K')-$*á bảo giác*. Kết quả cơ bản sẽ là hệ quả của những bổ đề liên quan đến công thức tính tích phân Dirichlet:

(1.9) $$\mathfrak{D}(r,z) = \iint_{B_r(z)} |Dw|^2 dx\,dy = \iint_{B_r(z)} \left(|w_x|^2 + |w_y|^2\right) dx\,dy$$

của ánh xạ $(K,K')-$*á bảo giác* w được lấy trên đĩa $B_r(z)$. Khi đó để đơn giản ta viết $\mathfrak{D}(r)$ thay cho $\mathfrak{D}(r,z)$ và B_r thay cho $B_r(z)$.

1.2.1 Đánh giá đối với tích phân Dirichlet đối với ánh xạ á bảo giác.

Bổ đề 1.4. *Giả sử* $w = p + iq$ *là* $(K,K')-$*á bảo giác trên hình tròn* $B_R = B_R(z_0)$ *thỏa mãn (1.8) với* $K > 0,\ K \geq 0$*, và giả sử* $|p| \leq M$ *trong* B_R*. Khi đó với mọi* $r \leq R/2$*, ta có*

(1.10) $$\mathfrak{D}(r) = \iint_{B_r} |Dw|^2 dx\,dy \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha}, \quad \alpha = K - (K^2 - 1)^{1/2},$$

với $C = C_1(K)(M^2 + K'R^2)$*. Nếu* $K' = 0$*, kết luận vẫn đúng với* $K = 1$.

Chứng minh. Trước tiên chúng ta thiết lập đánh giá cho tích phân Dirichlet trong hình tròn bán kính $R/2$. Từ (1.8) ta có với bất kỳ hình tròn đồng tâm $B_r \subset B_R$, ta có:

(1.11) $$\begin{aligned}\mathfrak{D}(z) = \iint_{B_r} |Dw|^2 dx\,dy &\leq 2K \iint_{B_r} \frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)} dx\,dy + K'\pi r^2 \\ &= 2K \int_{C_r} p \frac{\partial q}{\partial s}\, ds + K'\pi r^2,\end{aligned}$$

với s là ký hiệu độ dài cung tròn $C_r = \partial B_r$ lấy theo phương ngược chiều kim đồng hồ. Mặt khác sử dụng $\mathfrak{D}'(z) = \int_{C_r} |Dw|^2 ds$, ta thấy: