ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

−−−−−−−−−−−

PHẠM THỊ THU

JACOBIAN XẤP XỈ VÀ ỨNG DỤNG CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU KHÔNG TRƠN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

−−−−−−−−−−

PHẠM THỊ THU

JACOBIAN XẤP XỈ VÀ ỨNG DỤNG CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU KHÔNG TRƠN

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH NGUYỄN XUÂN TẤN

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Vào nửa sau thế kỉ XVII, nhà toán học người Đức là Leibniz và đồng thời nhà toán học người Anh là Newton đã phát minh ra phép tính vi phân, một công cụ đắc lực để giải quyết nhiều bài toán trong vật lý, cơ học, hóa học, kỹ thuật,... Nhưng phép tính vi phân mà Leibniz và Newton phát minh ra chỉ áp dụng được cho các lớp hàm có tính chất khá tốt.
Một vấn đề đặt ra là đó là cách giải quyết đối với các hàm không khả vi. Đây là vấn đề nghiên cứu của nhiều nhà khoa học vào nửa cuối thế kỉ XX. Từ đó môn giải tích không trơn ra đời. Môn học này đã giải quyết các bài toán trên các lớp hàm không có đạo hàm theo nghĩa thông thường bằng cách đưa ra các khái niệm dưới vi phân khác nhau để thay thế khái niệm đạo hàm, tại một điểm cho trước hàm được xấp xỉ bằng một họ các hàm tuyến tính. Nhờ đó mà giải tích không trơn đã đem lại nhiều kết quả sâu sắc trong lý thuyết tối ưu, giải tích biến phân, phương trình vi phân, cơ học và lý thuyết điều khiển.

Trong những năm gần đây nhiều nhà nghiên cứu về giải tích không trơn bằng cách tập trung phát triển các dưới vi phân suy rộng đảm bảo những tính chất tốt cũng như các điều kiện cần và đủ tối ưu đối với hàm không trơn như: F.H Clarke, R.T Rockafellar, D.Ralph và V.F.Demyanov và V.Jeyakumar,...Rất gần đây, với hàm liên tục, V.Jeyakumar và D.T.Luc đã đưa ra khái niệm mới về dưới vi phân và gọi là Jacobian xấp xỉ. Các khái niệm này cho ta một công cụ hữu ích để nghiên cứu những bài toán về hàm liên tục có Jacobian xấp xỉ và cũng có những phép tính khá tốt, tương ứng với các phép tính của đạo hàm thông thường như phép lấy tích, tổng, hợp, định lý về giá trị trung bình,... Đặc biệt, nhiều dưới vi phân cũng là Jacobian xấp xỉ, ví như dưới vi phân của hàm lồi, hàm Lipschitz và nhiều dưới vi phân khác như của Morduchovich, Michel-Penot, Treiman,...Việc nghiên cứu Jacobian xấp xỉ đã mở rộng, thống nhất và làm sâu sắc nhiều kết quả trong giải tích không trơn và tối ưu hóa. Lý thuyết Jacobian xấp xỉ đang là đề tài được nhiều nhà toán học quan tâm, nghiên cứu.

Với mong muốn được tìm hiểu kỹ hơn về lý thuyết Jacobian xấp xỉ cùng với sự giúp đỡ và hướng dẫn tận tình của GS. TSKH Nguyễn Xuân Tấn, tôi xin giới thiệu đề tài:

" JACOBIAN XẤP XỈ VÀ ỨNG DỤNG CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU KHÔNG TRƠN "

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu của đề tài này là tập trung trình bày có hệ thống một số kết quả về Jacobian xấp xỉ của một hàm liên tục trong không gian hữu hạn chiều, trước hết là hàm vô hướng, sau đó là hàm vectơ dựa trên cơ sở các kết quả V.Jeyakumar, D.T.Luc và các cộng sự nghiên cứu. Lý thuyết tối ưu vô hướng, vectơ đã được phát triển mạnh trong những thập niên cuối thế kỉ 20 và đầu thế kỉ 21; đến nay lý thuyết này vẫn còn là đề tài nghiên cứu hấp dẫn đối với nhiều nhà toán học trong và ngoài nước.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu

- Nghiên cứu lý thuyết Jacobian xấp xỉ và ứng dụng.
- Sử dụng các kết quả đã được công bố để hệ thống lại theo cách hiểu của mình và vận dụng vào các bài toán không trơn trong thực tế.
- Luôn gắn những bài toán trên vào các ứng dụng trong lý thuyết tối ưu, điều khiển tối ưu tới các hàm không trơn để tìm ra các kết quả mới trong lĩnh vực này.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Trước hết tìm hiểu thật kỹ các kiến thức cơ bản thuộc lĩnh vực giải tích hiện đại liên quan tới hàm vectơ và giải tích đa trị, đặc biệt là các tính chất của các hàm có Jacobian xấp xỉ.
- Sử dụng các tính chất khác nhau của Jacobian xấp xỉ để tìm các điều

kiện cần và đủ cho việc tồn tại nghiệm của bài toán tối ưu liên quan tới hàm có Jacobian xấp xỉ và đưa ra các ứng dụng trong các bài toán thực tế.

- Phân tích đặc thù riêng của từng bài toán để tìm ra các phương pháp khác nhau cho việc áp dụng lý thuyết Jacobian xấp xỉ.

5. Phương pháp nghiên cứu

- Dịch, đọc tài liệu, nghiên cứu toán học, các tài liệu chuyên khảo về lý thuyết tối ưu không trơn.
- Phân tích, tổng hợp kiến thức để phục vụ cho mục đích nghiên cứu.

6. Những đóng góp của đề tài

- Hoàn thành luận văn về đề tài lý thuyết tối ưu Jacobian xấp xỉ và ứng dụng, dày 64 trang.
- Tìm ra những ứng dụng có ý nghĩa trong lý thuyết tối ưu liên quan tới các hàm có Jacobian xấp xỉ.
- Làm rõ, hệ thống các kiến thức về hàm khả vi, Jacobian xấp xỉ, ứng dụng của Jacobian xấp xỉ.

Chương 1

HÀM KHẢ VI

1.1 Hàm khả vi từ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Định nghĩa 1.1.1. *Cho hàm $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ta nói hàm f khả vi tại điểm $x \in (a, b)$, nếu tồn tại giới hạn*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Giới hạn $f'(x)$ được gọi là đạo hàm của f tại x.

Định nghĩa 1.1.2. *Nếu hàm f có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì ta nói f khả vi trong (a, b).*

Định lý 1.1.3. *Nếu f khả vi tại x thì f liên tục tại x.*

1.2 Hàm khả vi từ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1.2.1 Các định nghĩa và tính chất

Cho U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, hàm $f : U \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$. Ta kí hiệu $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ là không gian các hàm tuyến tính liên tục từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2.1. *Hàm f được gọi là khả vi tại x nếu tồn tại một hàm tuyến tính liên tục $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sao cho*

$$f(x+h) - f(x) = L(h) + \epsilon(h)||h||,$$

trong đó $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon(h) \to 0$ *khi* $h \to 0$.
Hàm tuyến tính L được gọi là đạo hàm của f tại x, kí hiệu là $f'(x)$ *hay Df(x).*
Hàm f được gọi là khả vi trong U nếu nó khả vi tại mọi điểm $x \in U$.

Từ định nghĩa ta có thể chứng minh được định lý sau

Định lý 1.2.2. *Nếu f khả vi tại x thì đạo hàm tương ứng được xác định duy nhất.*

Định nghĩa 1.2.3. *Ta nói f khả vi theo hướng* $u \in \mathbb{R}^n$ *tại x nếu tồn tại giới hạn*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + hu) - f(x)}{h}.$$

Khi đó giới hạn này được gọi là đạo hàm của hàm f theo hướng u tại x, kí hiệu là $f'(x, u)$.

Định nghĩa 1.2.4. *Cho u là một vectơ trong cơ sở chính tắc* $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *trong* $\mathbb{R}^n$. *Nếu* $f'(x, e_i)$ *tồn tại thì được gọi là đạo hàm riêng thứ i của hàm f tại x, hay đạo hàm riêng theo biến* x_i *của hàm f tại x và kí hiệu là* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ *hay* $D_i f(x)$ *hoặc* $f'_{x_i}(x)$.

Ta có mối quan hệ giữa đạo hàm, đạo hàm riêng và đạo hàm theo hướng như sau

Định lý 1.2.5. *Nếu hàm f khả vi tại x thì có đạo hàm riêng theo mọi biến x và*

$$f'(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i, \textit{trong đó } h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Từ định lý này ta suy ra $f'(x)$ là hàm tuyến tính được xác định bởi ma trận $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$ và như vậy cũng có thể xem $f'(x)$ như một vectơ của không gian $\mathbb{R}^n$ gọi là vectơ gradient của f tại x, thường kí hiệu là $\nabla f(x)$.

Định lý 1.2.6. *Nếu hàm f có các đạo hàm riêng* $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$, $\dots$, $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ *trong một lân cận nào đó tại điểm x và chúng là các hàm số liên* *tục tại x thì hàm f khả vi liên tục tại x và*

$$f'(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i, \text{trong đó } h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Định lý 1.2.7. *Nếu hàm f khả vi tại x thì nó có đạo hàm theo mọi hướng tại x và*

$$f'(x,u) = f'(x)(u) = \langle \nabla f(x), u \rangle, u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Cho U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, hàm $f : U \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$. Giả sử $D_i f(x)$ tồn tại với mọi $x \in U$, khi đó ta có ánh xạ:

$$D_i f : U \to \mathbb{R}, x \mapsto D_i f(x).$$

Định nghĩa 1.2.8. *Nếu hàm $D_i f$ có đạo hàm riêng theo biến thứ j tại x thì đạo hàm này được gọi là đạo hàm riêng cấp hai của f tại x theo biến thứ i và thứ j hay theo các biến x_i và x_j, kí hiệu là $D_{ij} f(x)$ hay $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$.*

Định lý 1.2.9. ***(Định lý Schwarz)***

Cho U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, hàm $f : U \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$. Nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ tồn tại trên U và liên tục tại x thì ta có

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Áp dụng định lý Schwarz, ta có thể suy ra nếu f có các đạo hàm riêng liên tiếp đến cấp k trên U thì các đạo hàm riêng $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_p}}(x)$ $(p \leq k)$ không phụ thuộc vào thứ tự các biến lấy đạo hàm. Chúng luôn được viết dưới dạng chính tắc: $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$, với $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ là bộ n số nguyên không âm, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = p$.
Giả sử f khả vi trong U, khi đó ta có ánh xạ

$$f' : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), x \mapsto f'(x).$$

Định nghĩa 1.2.10.
(i) Hàm f gọi là khả vi liên tục hay thuộc lớp C^1 trên U nếu f' liên tục, kí hiệu là $f \in C^1(U)$.