ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

DƯƠNG VĂN THẮNG

NỘI SUY CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ ĐỒNG BẬC

LUẬN VĂN THẠC SĨ

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 01 13

Giáo viên hướng dẫn:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN, 2012

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Bất đẳng thức là một nội dung quan trọng trong chương trình toán phổ thông thường, dạng toán này thường xuất hiện trong các đề thi chọn học sinh giỏi trong nước và Quốc tế. Với hệ thống lí thuyết, bài tập và phương pháp giải đa dạng nên việc dạy và học chuyên đề này gặp rất nhiều khó khăn.

Với mong muốn có được một tài liệu để bồi dưỡng học sinh giỏi về chuyên đề này, đồng thời giúp học sinh tìm hiểu các kết quả về các bất đẳng cổ điển của các nhà toán học đã nghiên cứu và có nhìn nhận khái quát được nhiều các bất đẳng thức mà học sinh vẫn thường gặp, để từ đó có thể sáng tác được rất nhiều các bài toán về bất đẳng thức nên tôi đi tìm hiểu và nghiên cứu đề tài này.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục tiêu mà đề tài cần phải đạt được là từ một bài toán quen thuộc hay một bất đẳng thức đã biết, ta cần khái quát, mở rộng chúng ra để từ đó có thể tạo ra được rất nhiều các bất đẳng thức.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đề tài tập trung nghiên cứu một vài bất đẳng thức cổ điển và các bài toán nội suy bất đẳng thức thông qua các ví dụ.

4. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu trực tiếp từ các tài liệu của giáo viên hướng dẫn, tủ sách chuyên toán và các kỷ yếu hội thảo khoa học về chuyên toán cũng như từ bài học kinh nghiệm giảng dạy của các đồng nghiệp và các bạn học viên trong lớp.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi cấp trung học phổ thông.

6. Cấu trúc của luận văn

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 2 chương.

Chương 1.*Các bất đẳng thức cổ điển.*
Nội dung chương này các bất đẳng thức: Bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, bất đẳng thức Bernoulli. Đây là cơ sở lý thuyết để vận dụng cho các bài toán ở chương sau.

Chương 2.*Một số bài toán nội suy.*
Chương này trình bày một số bài toán nội suy: Nội suy bất đẳng thức bậc hai trên một đoạn, nội suy tam thức bậc tùy ý và nội suy bất đẳng thức trong lớp hàm đơn điệu.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Nhà giáo nhân dân Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin bày tỏ sâu sắc tới Giáo sư đã tận tình giúp đỡ tác giả hoàn thành luận văn này.
Trong quá trình học tập và làm luận văn, tác giả nhận được sự quan tâm, giúp đỡ của Khoa Toán, Phòng đào tạo Sau đại học của Trường Đại học Khoa học-Đại học Thái Nguyên, các thầy cô đã tham gia giảng dạy lớp cao học Toán K4C. Tác giả xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ quý báu đó .

Chương 1

Các bất đẳng thức cổ điển

Nội dung của chương này là trình bày các bất đẳng thức cổ điển quan trọng như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, bất đẳng thức Bernoulli. Đây là cơ sở lý thuyết để vận dụng cho các bài toán ở chương sau.

1.1 Bất đẳng thức Cauchy

Định lý 1.1 (Xem [1])**.** Với mọi bộ số $\left(x_i\right), \left(y_i\right)$, ta luôn có bất đẳng thức sau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right). \tag{1.1}$$

Dấu đẳng thức trong (1.1) xảy ra khi và chỉ khi hai bộ số $\left(x_i\right), \left(y_i\right)$ tỉ lệ với nhau, tức là tồn tại cặp số α, β không đồng thời bằng 0, sao cho

$$\alpha x_i + \beta y_i = 0, \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Chứng minh. Xét tam thức bậc hai sau đây

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i t - y_i)^2.$$

Sau khi khai triển ta có

$$f(t) = t^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2t \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Mặt khác vì $f(t) \geqslant 0,\ \ \forall t \in \mathbb{R}$ nên theo định lý về dấu của tam thức bậc hai ta có

$$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big) \leq 0.$$

Hay

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big).$$

Hệ quả 1.1. Với hai bộ số $\big(x_i\big)$ và $\big(y_i\big), y_i > 0,\ \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, ta luôn có

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}.$$

Bất đẳng thức này thường được gọi là bất đẳng thức Schwarz.

Chứng minh. Áp dụng định lý 1.1 với hai bộ số $\Big(\dfrac{x_i}{\sqrt{y_i}}\Big), \Big(\sqrt{y_i}\Big)$, ta có

$$\Big(\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}\sqrt{y_1} + \frac{x_2}{\sqrt{y_2}}\sqrt{y_2} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{y_n}}\sqrt{y_n}\Big)^2$$

$$\leq \Big(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n}\Big)\Big(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\Big).$$

$$\Leftrightarrow \Big(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\Big)^2 \leq \Big(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n}\Big)\Big(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\Big).$$

Hay

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}.$$

Một số bất đẳng thức liên quan.

Định lý 1.2 (Xem [1]). Với mọi cặp dãy số thực $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ và $0 \leq x \leq 1$, ta đều có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x \sum_{i \neq j} a_i b_j\Big)^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{i<j} a_i a_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x \sum_{i<j} b_i b_j\Big).$$

Rõ ràng với $x = 0$, ta thu được bất đẳng thức Cauchy.

Chứng minh. Xét tam thức bậc hai theo y:

$$f(y) = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x\sum_{i<j} a_i a_j\Big)y^2 - 2\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x\sum_{i\neq j} a_i b_j\Big)y + \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x\sum_{i<j} b_i b_j\Big)$$

$$= (1-x)\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k y - b_k\Big)^2 + x\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k y - b_k\Big)\Big)^2.$$

Dễ thấy $f(y) \geq 0$ với mọi y, và vì vậy ta suy ra ngay điều cần chứng minh.

Định lý 1.3 (H.W.Mclaughlin)**.** Với mọi cặp dãy số thực $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ta đều có

$$\Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2\Big) \geq \Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i\Big)\Big)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_i b_j - a_j b_i - a_{n+i} b_{n+j} + a_{n+j} b_{n+i} = 0$$

và

$$a_i b_{n+j} - a_j b_{n+i} + a_{n+i} b_j - a_{n+j} b_i = 0$$

ứng với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Chứng minh. Chứng minh được suy ra trực tiếp từ đẳng thức

$$\Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i\Big)\Big)^2$$

$$= \sum_{1\leq i<j\leq n}\Big(a_i b_j - a_j b_i - a_{n+i} b_{n+j} + a_{n+j} b_{n+i}\Big)^2 +$$

$$+ \sum_{1\leq i<j\leq n}\Big(a_i b_{n+j} - a_j b_{n+i} + a_{n+i} b_j - a_{n+j} b_i\Big)^2.$$

Định lý 1.4 (Xem [1])**.** Với mọi bộ số thực $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sao cho $a_k^2 + b_k^2 \neq 0$,k=1,2,. . . ,n, ta đều có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k^2 + b_k^2\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2 b_k^2}{a_k^2 + b_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Bất đẳng thức đầu xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi a và b tỷ lệ và bất đẳng sau xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi các véctơ $\{|a_k|\}_{k=1}^n$ và $\{|b_k|\}_{k=1}^n$ trực giao.

Bài toán 1.1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{5a^2+\left(b+c\right)^2}+\frac{b^2}{5b^2+\left(c+a\right)^2}+\frac{c^2}{5c^2+\left(a+b\right)^2}\le\frac{1}{3}.$$

Giải.

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{9a^2}{5a^2+\left(b+c\right)^2}=\frac{9a^2}{(a^2+b^2+c^2)+(2a^2+bc)+(2a^2+bc)}.$$

$$\le a^2\Big(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2a^2+bc}\Big).$$

Suy ra

$$9VT\le\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ca}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}$$

$$=1+\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ca}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}=4-(\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}).$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\ge$$

$$\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{bc(2a^2+bc)+ca(2b^2+ca)+ab(2c^2+ab)}=\frac{(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2}=1$$

Từ đây ta thu được điều cần chứng minh.

Bài toán 1.2 (USAMO 2009)**.** Cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})\le\left(n+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Chứng minh rằng $max\{a_i\} \leqslant 4\min\{a_i\}$.

Giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\min\{a_i\} = a_1; max\{a_i\} = a_2$.
Khi đó ta cần chứng minh $a_2 \leqslant 4a_1$.
Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}) = [(a_1 + a_2) + a_3 + \cdots + a_n]$$

$$\times\Big[(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}) + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}\Big]$$

$$\geq \Big(\sqrt{(a_1 + a_2)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-2\ so}\Big)^2 = \Big(\sqrt{(a_1 + a_2)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})} + n - 2\Big)^2.$$

Do đó, từ giả thuyết ta suy ra

$$(a_1 + a_2)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}) \leqslant \frac{25}{5} \Leftrightarrow \Big(\frac{a_2}{a_1}\Big)^2 - \frac{17}{4}\frac{a_2}{a_1} + 1 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} \leqslant 4 \Leftrightarrow a_2 \leqslant 4a_1.$$

Ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 1.3 (MO Romanian 2004)**.** Chứng minh rằng, với mọi $a, b, c > 0$, ta đều có

$$\frac{a}{bc(c+a)} + \frac{b}{ca(a+b)} + \frac{c}{ab(b+c)} \geq \frac{27}{2\Big(a+b+c\Big)^2}.$$

Giải. Đặt

$$\frac{a}{bc(c+a)} + \frac{b}{ca(a+b)} + \frac{c}{ab(b+c)} = M$$

Ta có

$$\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}} + \sqrt{\frac{b}{ca}} + \sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2 =$$

$$= \Big(\sqrt{\frac{a}{bc(c+a)}}\sqrt{c+a} + \sqrt{\frac{b}{ca(a+b)}}\sqrt{a+b} + \sqrt{\frac{c}{ab(b+c)}}\sqrt{b+c}\Big)^2$$

$$\leq \Big[\frac{a}{bc(c+a)} + \frac{b}{ca(a+b)} + \frac{c}{ab(b+c)}\Big]\Big[2\Big(a+b+c\Big)\Big] = M\Big[2\Big(a+b+c\Big)\Big].$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}\Big)^2+\Big(\sqrt{\frac{b}{ca}}\Big)^2+\Big(\sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2\geq\sqrt{\frac{a}{bc}}\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}\sqrt{\frac{c}{ab}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\sqrt{\frac{a}{bc}}$$

$$\Leftrightarrow\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}\Big)^2+\Big(\sqrt{\frac{b}{ca}}\Big)^2+\Big(\sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2+2\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}\sqrt{\frac{c}{ab}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\sqrt{\frac{a}{bc}}\Big)$$

$$\geq 3\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}\sqrt{\frac{c}{ab}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\sqrt{\frac{a}{bc}}\Big)$$

$$\Leftrightarrow\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2\geq 3\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)\geq\frac{27}{a+b+c}$$

nên suy ra

$$M\geq\frac{27}{2(a+b+c)}.$$

Bài toán 1.4 (MO USA)**.** Xét các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}.$$

Giải. Ta có

$$P=\frac{abc}{a^2(b+c)}+\frac{abc}{b^2(c+a)}+\frac{abc}{c^2(a+b)}=\frac{bc}{a(b+c)}+\frac{ac}{b(c+a)}+\frac{ab}{c(a+b)}$$

$$=\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}+\frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Đặt $\quad \dfrac{1}{a}=x, \dfrac{1}{b}=y, \dfrac{1}{c}=z.$

Khi đó

$$P=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{z+x}+1+\frac{z}{x+y}+1-3$$

$$=(x+y+z)\Big(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\Big)-3$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\Big(y+z\Big)+\Big(z+x\Big)+\Big(x+y\Big)\Big]\Big(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\Big)-3\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.